Université Bordeaux 1 Année 2010-2011

MHT 204

Feuille d'exercices n° 2 — Continuité

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. La fonction f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 2
Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} .$$

Exercice 3
1. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$$a)\ f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin x\ ; \quad b)\ f_2(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

2. La fonction $f_3 : \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} .$$

Exercice 4
Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?
1. $f(x) = xE(x)$
2. $g(x) = E(x)\sin(\pi x)$

Exercice 5
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin x$.
1. Trouver une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f(x_n)$ tende vers $+\infty$.
2. Trouver une suite (y_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f(y_n)$ tende vers 0.
3. La fonction f admet-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

Exercice 6
Soit
$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est majorée et minorée sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\operatorname{Sup}_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $f(x) - x$ soit bornée sur $[x_0, +\infty[$. Déterminer la limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\ .$$

Exercice 8

1. On considère la fonction f donnée par
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } \ |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } \ |x| \geq 1 \end{cases}$$
Exite-t-il des réels a, b, c pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$f(x) = \frac{((1+x)^n - 1)}{x}?$$

Exercice 9

1. Montrer que dans tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.
2. En déduire que la fonction δ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 10
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$.
2. Montrer que sur $[0,1]$, f admet une fonction réciproque.
3. Montrer que f n'est pas monotone sur $[0,1]$ et n'est pas continue sur $[0,1]$.

Exercice 11
Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue de $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[x_0, +\infty[$.

Exercice 12

1. Montrer que l'équation $x^5 = x^2 + 2$ a au moins une solution sur $]0, 2[$.
2. Montrer que le polynôme x^3+2x-1 a une unique racine qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
3. Montrer que l'équation $x^2(\cos x)^5 + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, +\infty[$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X) = X^n - \alpha$ admet une unique racine dans $]0, +\infty[$.

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $P_n(x) \geq P_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (x_n) converge.
3. Calculer la limite de (x_n).

Exercice 15

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f.
2. Donner un exemple de fonction définie sur $]0, 1[$ à valeurs dans $]0, 1[$ qui n'admet pas de point fixe.

Exercice 16

1. Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Montrer que f admet une réciproque que l'on explicitera.
2. Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x) = \tan(x^3)$ admette une fonction réciproque (on précisera alors le domaine de définition de cette réciproque et son image).