Université Bordeaux 1 Année 2010-2011

MHT 204

Feuille d'exercices n° 1 — Suites

Exercice 1 (suites arithmétiques)

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2, telle que $u_5 = 7$. Calculer u_{100}.
2. Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_3 = 12$ et $v_8 = 0$. Calculer sa raison r. En déduire la valeur de v_0 et v_{18}.
3. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ?
4. Déterminer sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3.

Exercice 2 (suites géométriques)

1. Soit (u_n) une suite géométrique, de raison q strictement positive, telle que $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$. Calculer u_{20}.
2. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ?
3. La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?
4. Existe-t-il une suite dont les trois premiers termes soient à la fois en progression arithmétique et géométrique ?

Exercice 3

On considère les suites

$$\alpha_n = \frac{2+\cos n}{n} \ , \quad \beta_n = (2+\cos n)n \ , \quad \gamma_n = (-1)^n(2+\cos n)n$$

1. Les suites ci-dessus sont-elles bornées ?
2. Sont-elles convergentes ?

Exercice 4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\pi + \frac{1}{n}$.

1. La suite (u_n) est-elle bornée ?
2. La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \sin(u_n)$ converge vers 0.

Exercice 5

On considère les suites

$$x_n = \frac{1}{n} \ , \quad y_n = n \ , \quad z_n = n^2 \ , \quad t_n = (-1)^n$$

1. Quelle est la nature (convergence ou divergence) des suites ci-dessus ?

2. Quelle est la nature des suites $(x_n y_n)$ et $(x_n z_n)$?
3. Quelle est la nature des suites $(t_n + t_{n+1})$ et (t_n^2) ?

Exercice 6

1. Soient (x_n) une suite convergente et (y_n) une suite divergente. Que peut-on dire sur la convergence des suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$? Donner des exemples.
2. Soient (x_n) et (y_n) deux suites divergentes. Que peut-on dire sur la convergence des suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$? Donner des exemples.
3. Soient (x_n) une suite quelconque et (y_n) une suite avec $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Est-il vrai que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Donner des exemples.

Exercice 7 (suites complexes)

Etudier la convergence des suites de terme général ci-dessous.

$$1.\ z_n = 4 + ni, \quad 2.\ z_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1}, \quad 3.\ z_n = \frac{n^2 i^n}{n^3+1}, \quad 4.\ z_n = (-1)^n e^{in\pi}$$

$$5.\ z_n = e^{ni\frac{\pi}{4}}, \quad 6.\ z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}, \quad 7.\ z_n = e^{(-1)^n \frac{i\pi}{n}}.$$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_1 = 1 \text{ et, pour tout } n \geq 1,\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 2$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 9 (convergence au sens de Cesàro)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

On dit que (u_n) converge au sens de Cesàro si la suite (c_n) converge.

1. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ converge au sens de Cesàro vers une limite que l'on déterminera.
2. Même question pour la suite $v_n = (0, 1, 0, 1, \dots)$.

Exercice 10 (suites de Cauchy)

1. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
2. Montrer que la suite $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.
3. Montrer que la suite $u_n = \frac{E(10^n\sqrt{2})}{10^n}$ à valeurs rationnelles admet une limite irrationnelle. En déduire qu'en général une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 11
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2+\frac{1}{k})^k}.$$

Montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge.

Exercice 12
Soit $(H_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. En utilisant une intégrale, montrer, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité double
$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que la suite $u_n := H_n - \ln(n)$ converge (indication : on montrera que (u_n) est décroissante).

Exercice 13
1. Démontrer qu'une suite réelle (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.
2. Pour $n \geq 1$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$
Montrer que la suite (u_n) converge (indication : on pourra montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes).

Exercice 14
On considère les deux suites

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n! \cdot n}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, notée e.
2. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 15
Trouver le sup et l'inf de chacune des suites ci-dessous.

$$u_n = (-1)^n \ , \quad v_n = (-1)^n(1 + (-1)^n \frac{1}{n}) \ ,$$
$$w_n = (2 + (-1)^n \frac{1}{n}) \sin \frac{\pi n}{2} \ , \quad t_n = n^{(-1)^n}.$$