Licence première année
PIN204C
Mathématiques pour la chimie

Vendredi 11 mai 2007
Première session 2007
Amphi. Kastler
14h-17h
Fascicule de cours autorisé

Exercice 1 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)(e^x - 1 - x^2)}{x^2}\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}(x+1)^2\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,.$$

Exercice 2 *On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ définie pour $t > 0$ par la fonction*

$$f(t) = (-\ln t + t\ln t\,,\ t - \ln t)\ .$$

1. *Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point stationnaire et le localiser.*
2. *Quelle est la nature de ce point stationnaire.*
3. *La courbe admet-elle une branche infinie lorsque $t \to 0$?*
4. *Si oui, quelle est sa nature?*
5. *La courbe admet-elle une branche infinie lorsque $t \to +\infty$?*
6. *Si oui, quelle est sa nature?*
7. *On admet pour l'instant qu'à part le point stationnaire, tous les autres points de la courbe sont biréguliers. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$.*
8. *Montrer qu'à part le point stationnaire, tous les autres points sont biréguliers.*

Exercice 3 *On considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ définie pour $t > 0$ par la fonction*

$$g(t) = \left(t + \frac{1}{t}\,,\ (t-1)^4\right)\ .$$

1. *Quelle est la nature du point $g(1)$?*
2. *La courbe admet-elle une branche infinie lorsque $t \to 0$? Si oui, quelle est sa nature?*
3. *La courbe admet-elle une branche infinie lorsque $t \to +\infty$? Si oui, quelle est sa nature?*

Exercice 4 *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\,. \tag{1}$$

On se propose de résoudre cette équation à l'aide des coordonnées polaires. On pose

$$(x,y) = \phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on pose $g = f\circ\phi$. Exprimer les dérivées partielles de g par rapport à r et θ en fonction des dérivées partielles de f par rapport à x et y.*
2. *Si f est solution de (1), quelle est l'équation vérifiée par g?*
3. *Trouver les fonctions g qui vérifient cette équation.*
4. *En déduire les solutions f de (1).*

Exercice 5 *On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x\,.$$

1. *Montrer que la fonction f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.*
2. *La fonction f admet-elle un extremum local en ce point et si oui de quelle nature?*