UNIVERSITE BORDEAUX I
Département des Licences
Mention Physique et Ingénierie

juin 2007

ÉTAPE : PING2/SPC2/PREPA2
UE : PIN204

UNE CORRECTION

Exercice 1

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

C'est du cours, f est la fonction sinus hyperbolique (sinh) et g la fonction cosinus hyperbolique (cosh).
On a donc $f(x) = x + x^3/6 + o(x^4)$ et $g(x) = 1 + x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$.

2. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f^2(x) - 2\ln(g(x))}{x^2(1 - g(2x))}.$$

- $g(x) = 1 + x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ donc $g(2x) = 1 + (2x)^2/2 + o(x^2) = 1 + 2x^2 + o(x^2)$ d'où $x^2(1 - g(2x)) \sim -2x^4$
- $f(x) = x + x^3/6 + o(x^4)$ donc $f^2(x) = x^2 + x^4/3 + o(x^4)$
- Comme $\ln(1 + X) = X - X^2/2 + o(X^2)$, $\ln(g(x)) = x^2/2 - x^4/12 + o(x^4)$
- Des 2 points précédents on déduit :$f^2(x) - 2\ln(g(x)) \sim x^4/2$

D'où par quotient

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f^2(x) - 2\ln(g(x))}{x^2(1 - g(2x))} = -4$$

Exercice 2

On considère, au voisinage de $t = 0$, la courbe paramétrée définie par

$$\begin{aligned} x(t) &= \tan(\cos t - 1), \\ y(t) &= \sqrt{\cos t} - 1. \end{aligned}$$

1. Montrer que la courbe représentative admet un point stationnaire M_1 en $t = 0$ et trouver ses coordonnées (x_1, y_1).

On calcule les dérivées de x et y en 0.

Pour t voisin de 0, $\begin{cases} x'(t) = -\sin(t)\left(1 + \tan^2(\cos t - 1)\right), \\ y'(t) = -\dfrac{\sin(t)}{2\sqrt{\cos t}}. \end{cases}$

On a donc $x'(0) = y'(0) = 0$ donc M_1 est bien un point stationnaire pour la courbe paramétrée.

2. Donner le développement limité de $\tan u$ au voisinage de $u = 0$.

C'est du cours : $\tan u = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + o(u^7)$

3. Montrer que M_1 est un point de rebroussement. De quelle espèce ?

4. Tracer l'allure locale de la courbe au voisinage de M_1.

Effectuons un développement limité de x et y au voisinage de 0.

$x(t) = \tan\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5)\right) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5)$

$y(t) = \sqrt{1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5)} - 1 = -\frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{96} + o(t^5)$

d'où si on écrit le résultat de manière vectorielle avec les notations habituelles :

$$\overrightarrow{OM}(t) = -\frac{t^2}{4}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{t^4}{96}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} + \vec{o}(t^4)$$

On en déduit que M_1 est un point de rebroussement de 1ère espèce.

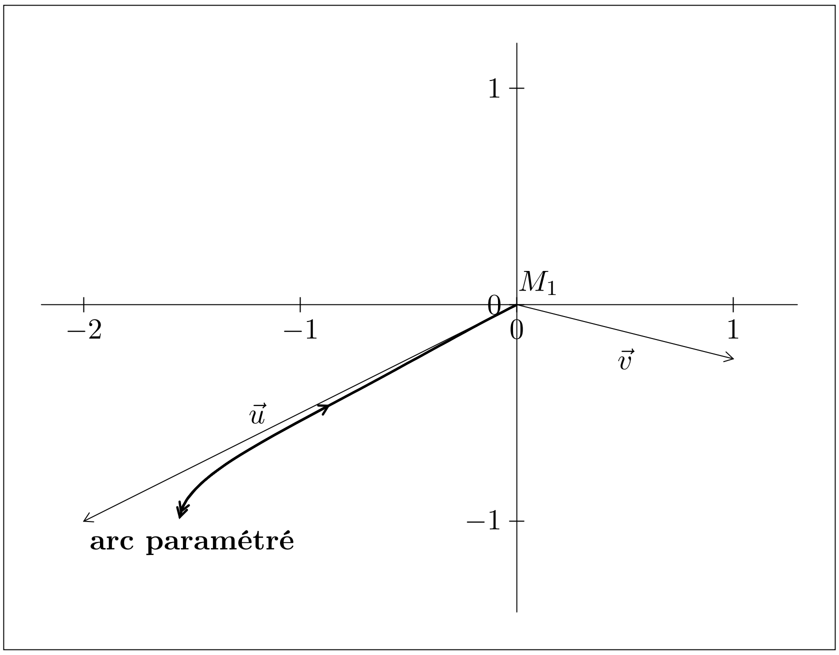

FIG. 1 – Allure de l'arc au voisinage du point $M_1, \vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1/4\end{pmatrix}$

Remarque : x et y sont des fonctions paires et donc $M(t) = M(-t)$ ce qui prouve que le point de rebroussement est forcément de deuxième espèce puisque l'arc "repasse" sur lui même. Par contre la position de l'arc par rapport à sa tangente en M_1 est donné par le terme en t^4 du DL de x et y.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de tracer la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t}{t^2-1}, \\ y(t) &= \frac{t^2}{t-1}. \end{aligned}$$

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative.

1. Quel est le domaine de définition D ?

$D = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

2. Sur D, dresser le tableau regroupant les variations de $x(t)$ et $y(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}, \\ y'(t) &= \frac{t(t^2)}{(t-1)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖		$-$		‖		$-$		
x	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘		0
y	$-\infty$	↗	$-0,5$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$+$			0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Fig. 2 – Tableau de variation de x et y

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet des branches infinies lorsque $t \longrightarrow 1^+$ et $t \longrightarrow 1^-$.

Lorsque $t \longrightarrow 1^-$, x et y tendent vers $-\infty$, on a donc une branche infinie.
De même, lorsque $t \longrightarrow 1^+$, x et y tendent vers $+\infty$, on a donc aussi une branche infinie.

4.a) Montrer que la courbe admet des asymptotes lorsque $t \longrightarrow 1^+$ et $t \longrightarrow 1^-$. Quelles sont leurs équations ? Déterminer alors la position relative de la courbe et de ses asymptotes.

On a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t(t+1) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 2$ et $y(t) - 2x(t) = \dfrac{t(t+2)}{t+1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 3/2$
Donc la droite d'équation $y = 2x + 3/2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ lorsque lorsque $t \longrightarrow 1^+$ et $t \longrightarrow 1^-$.

$y(t) - 2x(t) - 3/2 = \dfrac{(t-1)(2t-3)}{2(t+1)}$ est positif si $-1 < t < 1$ et négatif si $t > 1$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de l'asymptote si $-1 < t < 1$ et au dessus si $t > 1$.

---

b) Mêmes questions au voisinage de -1.

Lorsque $t \longrightarrow -1$, x tend vers $\pm\infty$ tandis que y tend vers $-0,5$. On aura donc une asympote horizontale d'équation $x = 0,5$ lorsque $t \longrightarrow -1^-$ et $t \longrightarrow -1^+$

---

5. Donner l'équation de la tangente au point $t = 0$.

$\begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} x(0) & = & -1 \\ y(0) & = & 0 \end{array}$ donc la tangente au point demandé est la droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Elle a donc pour équation $y = 0$ (c'est l'axe des abscisses).

---

6. Tracer la courbe.

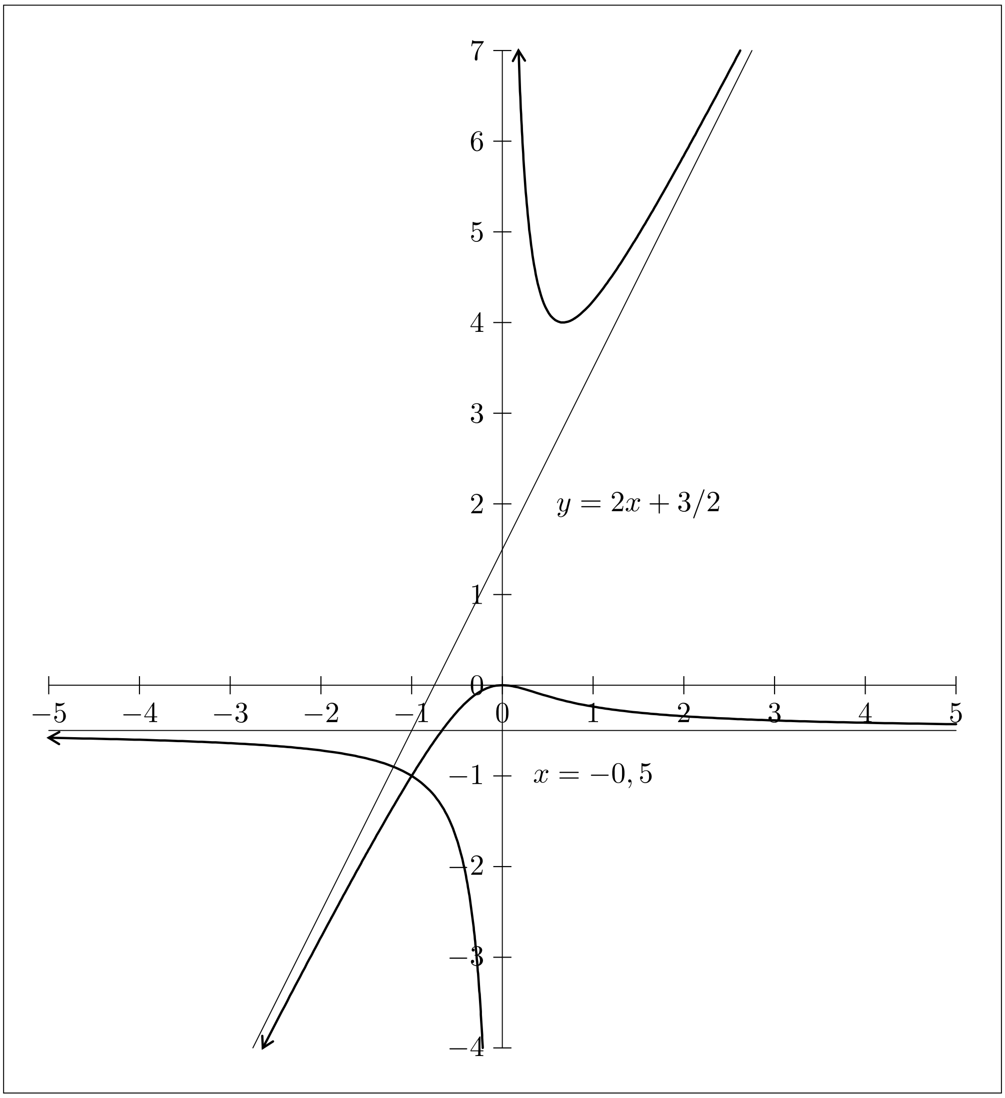

FIG. 3 – Courbe $\mathcal{C}$ et éléments calculés dans l'exercice.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$

On rappelle que la dérivée de la fonction $u \mapsto \arctan u$ est $\dfrac{1}{1+u^2}$. Dans tout l'exercice, $r > 0$, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.
On note $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

1. Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ la fonction réciproque de φ. Montrer que $\psi_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\psi_2(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$.

Soient $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Cherchons $r > 0$, et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ tels que $\varphi(r,\theta) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\theta &= x \quad (1) \\ r\sin\theta &= y \quad (2) \end{cases}$ (S_1)

(S_1) implique (S_2) $\begin{cases} r^2 &= x^2+y^2 \quad (3) = (1)^2 + (2)^2 \\ \tan\theta &= \dfrac{y}{x} \quad (4) = \dfrac{(2)}{(1)} \end{cases}$ ($\dfrac{(2)}{(1)}$ est toujours possible car $x > 0$)

Il nous suffit donc de montrer que (S_2) implique (S_1).

$(4) \Leftrightarrow y = x\tan\theta$ et en substituant y par cette expression dans (3) on obtient $r^2 = x^2(1+\tan^2\theta)$ d'où, $r^2 cos^2\theta = x$ et comme $x > 0$,$r > 0$, et $\cos\theta > 0$, $x = r\cos\theta$ ce qui est (1). On retrouve (2) en substituant x par $r\cos\theta$ dans (4).

Donc $(S_1) \Leftrightarrow (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$.

Remarque : la dernière équivalence est vraie car le r cherché est positif et que $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$

Donc avec les condition précisées sur x,y,r et θ, on a bien :

$$\varphi(r,\theta) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\theta &= x \\ r\sin\theta &= y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases} .$$

Donc φ est bijective et sa bijection réciproque ψ est telle que $\psi_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\psi_2(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ avec $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

2. Calculer les dérivées partielles : $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial y}(x,y)$, $i = 1, 2$.

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r}$$
$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

3. On considère l'application $f(r,\theta) = r^2 - \theta$ et on pose $F(x,y) = f(\psi(x,y))$. Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = 2r\cos\theta + \frac{\sin\theta}{r} = 2x + \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = 2r\sin\theta - \frac{\cos\theta}{r} = 2y - \frac{x}{x^2+y^2}$$