UNIVERSITE BORDEAUX I
Département des Licences
Mention Physique et Ingénierie

juin 2007

ÉTAPE : PING2/SPC2/PREPA2
UE : PIN204
Épreuve de Mathématiques

Documents non autorisés – Tous les exercices sont indépendants

Durée : 3 h

Exercice 1

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

2. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f^2(x) - 2\ln(g(x))}{x^2(1 - g(2x))}.$$

Exercice 2

On considère, au voisinage de $t = 0$, la courbe paramétrée définie par

$$\begin{aligned} x(t) &= \tan(\cos t - 1), \\ y(t) &= \sqrt{\cos t} - 1. \end{aligned}$$

1. Montrer que la courbe représentative admet un point stationnaire M_1 en $t = 0$ et trouver ses coordonnées (x_1, y_1).

2. Donner le développement limité de $\tan u$ au voisnage de $u = 0$.

3. Montrer que M_1 est un point de rebroussement. De quelle espèce ?

4. Tracer l'allure locale de la courbe au voisinage de M_1.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de tracer la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t}{t^2-1}, \\ y(t) &= \frac{t^2}{t-1}. \end{aligned}$$

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative.

1. Quel est le domaine de définition D ?

2. Sur D, dresser le tableau regroupant les variations de $x(t)$ et $y(t)$.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet des branches infinies lorsque $t \longrightarrow 1^+$ et $t \longrightarrow 1^-$.

4.a) Montrer que la courbe admet des asymptotes lorsque $t \longrightarrow 1^+$ et $t \longrightarrow 1^-$. Quelles sont leurs équations ? Déterminer alors la position relative de la courbe et de ses asymptotes.

b) Mêmes questions au voisinage de -1.

5. Donner l'équation de la tangente au point $t = 0$.

6. Tracer la courbe.

Exercice 4

On rappelle que la dérivée de la fonction $u \mapsto \arctan u$ est $\dfrac{1}{1+u^2}$. Dans tout l'exercice, $r > 0$, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.
On note $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

1. Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ la fonction réciproque de φ. Montrer que $\psi_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\psi_2(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$.

2. Calculer les dérivées partielles : $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial y}(x,y)$, $i = 1, 2$.

3. On considère l'application $f(r,\theta) = r^2 - \theta$ et on pose $F(x,y) = f(\psi(x,y))$. Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$