

Devoir maison 1.

(Les exercices sont indépendants.)

Exercice 1. 1) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction cosinus entre 0 et x , à l'ordre 3.

2) En déduire l'inégalité : $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^4}{24}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Donner une valeur approchée de $\cos(10^{-1})$ avec une erreur inférieure à 10^{-5} .

Exercice 2. a) Donner le développement limité en 0 (i.e. *au voisinage de 0*), à l'ordre 3, de

$$f(x) = \ln(1 - x) + e^x \ln(1 + x).$$

b) Que vaut $f'''(0)$?

Exercice 3. a) Donner le développement limité à l'ordre 4 de $f(x) = e^{x \sin x}$ au voisinage de 0.

b) Même question pour $g(x) = \cos^2 x$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x \sin x} \cos^2 x}{\sin^4 x}$.

Exercice 4. On pose

$$f(x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}, \quad x \in]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[.$$

a) Donner le développement limité en 0, à l'ordre 2, de $1/\cos^2 x$. En déduire le développement limité en 0, à l'ordre 3, de $\tan x$.

b) Donner le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0, de f .

c) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi obtenue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

d) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.