Petit formulaire de trigonométrie

L1 MIASHS — Analyse 1

19 novembre 2014

Sans forcément les connaître par cœur, vous devez être capable de reconstituer les formules usuelles de la trigonométrie en quelques minutes.

Commençons par la célèbre conséquence du théorème de Pythagore : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

1 Propriétés liées au cercle trigonométrique

1.1 Symétries, parité

Parité	Réflexion d'axe $\theta = \pi/2$	Réflexion d'axe $\theta = \pi/4$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = (\tan\theta)^{-1}$

1.2 Périodicité, décalages

Décalage de $\pi/2$	Décalage de π	Décalage de 2π
$\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta$	$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$	$\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$
$\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$	$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$	$\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta$
$\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) = -(\tan\theta)^{-1}$	$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$	$\tan(\theta+2\pi) = \tan\theta$

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période 2π.

La fonction tangente est périodique, de période π.

1.3 Équations trigonométriques

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos x = \cos\theta &\Leftrightarrow x = \theta + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = -\theta + 2k\pi && \text{(avec } k \in \mathbb{Z}\text{)}\\
\sin x = \sin\theta &\Leftrightarrow x = \theta + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \pi - \theta + 2k\pi && \text{(avec } k \in \mathbb{Z}\text{)}\\
\tan x = \tan\theta &\Leftrightarrow x = \theta + k\pi && \text{(avec } k \in \mathbb{Z}\text{)}
\end{aligned}$$

2 Formules d'addition et de différence

Rappelons les *formules d'addition :*

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Ces formules décrivent ce qui se passe quand on compose les rotations du plan. Le meilleur moyen pour les retrouver est d'utiliser l'écriture exponentielle des nombres complexes.

On en déduit les *formules de l'angle double :*

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Autre conséquence : pour a et b dans $\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, nous avons :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Enfin, les *formules de Simpson* permettent de transformer des sommes en produits :

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$