Corrigé du contrôle du 5 décembre 2014

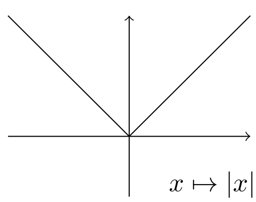
Corrigé de l'exercice 1 Voir le cours !

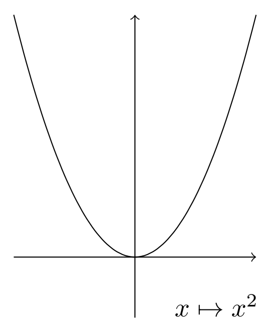
Corrigé de l'exercice 2 Nous avons :

$a)$ $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ $b)$ $\arccos \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\pi}{4}$

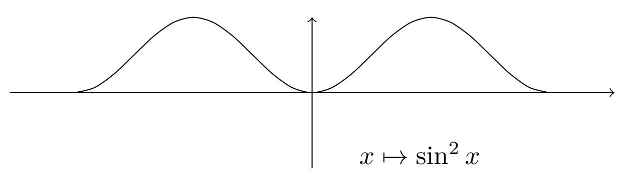
$c)$ $\arcsin\left(\sin \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ $d)$ $\arctan(\tan 3) = 3 - \pi$.

Corrigé de l'exercice 3 1) Les graphes demandés :

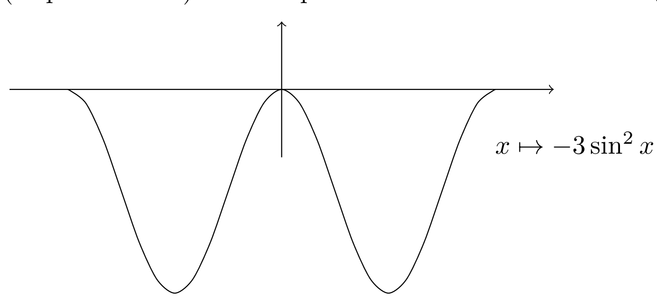




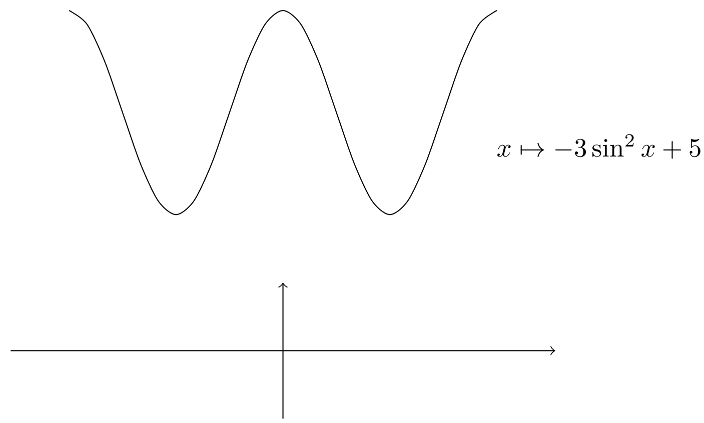
2) Les graphes demandés :



La valeur maximale (resp. minimale) atteinte par cette fonction sur $\mathbb{R}$ est 1 (resp. 0).



La valeur maximale (resp. minimale) atteinte par cette fonction sur $\mathbb{R}$ est 0 (resp. -3).



La valeur maximale (resp. minimale) atteinte par cette fonction sur $\mathbb{R}$ est 5 (resp. 2).

3) La fonction $f : x \mapsto -3\sin^2 x + 5$ est continue car la fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et les opérations algébriques (somme, produit, etc.) préservent la continuité.

4) Sur l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto \sin x$ est strictement décroissante, à valeurs négatives. On en déduit que la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ est strictement croissante, à valeurs positives, sur ce même intervalle. Par suite, f est strictement décroissante sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de la bijection, l'ensemble image est donc :

$$K = f\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f(\pi)\right] = [2, 5].$$

5) Comme on l'a dit dans la question précédente, la fonction f étant continue strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, elle réalise une bijection entre celui-ci et l'intervalle $[2, 5]$. Par conséquent, f admet une fonction réciproque

$$g : [2, 5] \longrightarrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

6) Par définition de la fonction réciproque, étant donné $x \in [2, 5]$, $g(x)$ est l'unique réel $y \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $f(y) = x$, autrement dit y est l'unique solution de l'équation

$$-3\sin^2 y + 5 = x.$$

Celle-ci se réécrit

$$\sin^2 y = \frac{5 - x}{3}.$$

Comme x appartient à $[2, 5]$, le membre droit est bien un réel positif ou nul. D'autre part, on cherche y dans l'intervalle $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est à valeurs négatives. Par conséquent, y doit satisfaire à l'équation :

$$\sin y = -\sqrt{\frac{5 - x}{3}}$$

On vérifie aisément que l'unique solution y qui appartient au bon intervalle est

$$y = \pi - \arcsin\left(-\sqrt{\frac{5 - x}{3}}\right) = \pi + \arcsin\left(\sqrt{\frac{5 - x}{3}}\right).$$

7) Dessin omis !

Corrigé de l'exercice 4 L'équation s'écrit

$$e^{2x} - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - 6 = 0,$$

c'est-à-dire

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0.$$

On pose $T = e^x$, alors l'équation précédente devient une équation de degré 2 en T, à savoir

$$T^2 - T - 6 = 0.$$

Cette équation a deux solutions : $T = -2$ et $T = 3$. La solution $T = -2$ est à écarter car $T = e^x$ donc T est strictement positif. Au final l'équation de départ admet une solution unique : $x = \ln 3$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Pour tout $x > 0$ on peut écrire :

$$e^x - (x^3 + x^2 + x + 2) = x^4 \left(\frac{e^x - (x^3 + x^2 + x + 2)}{x^4}\right) = x^4 \left(\frac{e^x}{x^4} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right)\right).$$

Or, comme le rappelle l'énoncé, nous avons

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^4} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \to +\infty} e^x - (x^3 + x^2 + x + 2) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty.$$

2. Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0. D'autre part, pour $x < 0$ on peut écrire

$$x^3 + x^2 + x + 2 = x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right).$$

Quand x tend vers $-\infty$, le contenu de la parenthèse tend vers 1 et x^3 tend vers $-\infty$, donc le produit tend vers $-\infty$. Nous avons donc :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x - (x^3 + x^2 + x + 2) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = e^x - (x^3 + x^2 + x + 2).$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$, et satisfait $f(0) = -1$. D'après la question 1, la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$. Comme 0 appartient à l'intervalle $[-1, +\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe au moins un réel $x_1 \in]0, +\infty[$ tel que $f(x_1) = 0$. De même, la limite de f en $-\infty$ est égale à $+\infty$, donc il existe un réel $x_2 \in] - \infty, 0[$ tel que $f(x_2) = 0$. Ce qu'on voulait.