

Contrôle du 5 décembre 2014 — Durée : 1h

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Exercice 1 (Question de cours)

Énoncer sans erreur :

- 1) la formule de Leibniz sur la dérivée n -ième d'un produit de deux fonctions ;
- 2) la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice 2

Calculer les quantités suivantes :

$$a) \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b) \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$c) \arcsin \left(\sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$d) \arctan(\tan 3)$$

Exercice 3

- 1) Dessiner sur l'intervalle $[-2, 2]$ les graphes des fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$.
- 2) Dessiner sur $[-\pi, \pi]$ les graphes des fonctions

$$x \mapsto \sin^2 x, \quad x \mapsto -3 \sin^2 x, \quad x \mapsto -3 \sin^2 x + 5$$

en précisant à chaque fois le maximum et le minimum de la fonction sur \mathbb{R} .

- 3) On note f la fonction définie par

$$f : \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto -3 \sin^2 x + 5$$

La fonction f est-elle continue ? Pourquoi ?

- 4) Quel est l'ensemble image

$$K = f \left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right] \right)$$

- 5) Montrer qu'on peut définir une fonction

$$g : K \longrightarrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$$

qui est la réciproque de f .

- 6) Expliciter la formule $y = g(x)$.
- 7) Dessiner les graphes des fonctions f et g .

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$e^{2x} - \cosh x - \sinh x - 6 = 0.$$

Exercice 5

1. Quelle est la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - (x^3 + x^2 + x + 2) ?$$

(on rappelle que, pour tout entier naturel n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$).

2. Quelle est la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - (x^3 + x^2 + x + 2) ?$$

3. Montrer que l'équation

$$e^x = x^3 + x^2 + x + 2$$

possède au moins deux solutions réelles, dont l'une est strictement positive et l'autre strictement négative.