Corrigé du contrôle du 4 novembre 2014

Corrigé de l'exercice 1 a) Il est bien connu que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

d'où

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=+\infty.$$

b) La fonction sinus est bornée sur $\mathbb{R}$, et $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Or le produit d'une quantité bornée par une quantité qui tend vers 0 tend vers 0 (cas particulier du théorème des gendarmes), donc

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0.$$

c) En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, cette quantité tend vers 1.

d) Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0, donc $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0. La fonction cosinus étant bornée sur $\mathbb{R}$, on en déduit (comme dans la question b) que

$$\lim_{x\to +\infty}\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

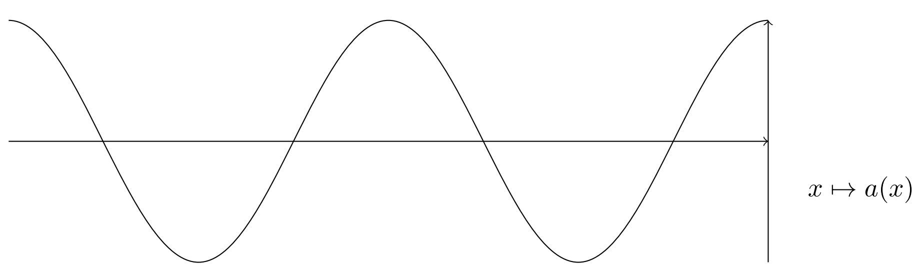
Corrigé de l'exercice 2 1) Il vient

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} b\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}+1 \qquad \text{et} \qquad c\left(\frac{1}{2}\right)=2\alpha-2$$

Or l'énoncé stipule que ces deux quantités sont égales. Il en résulte aussitôt que

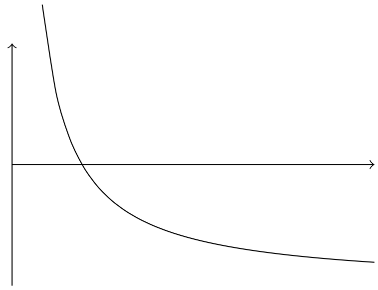
$$\alpha=\frac{\sqrt{e}+3}{2}.$$

2) Le graphe de la fonction a est le suivant :



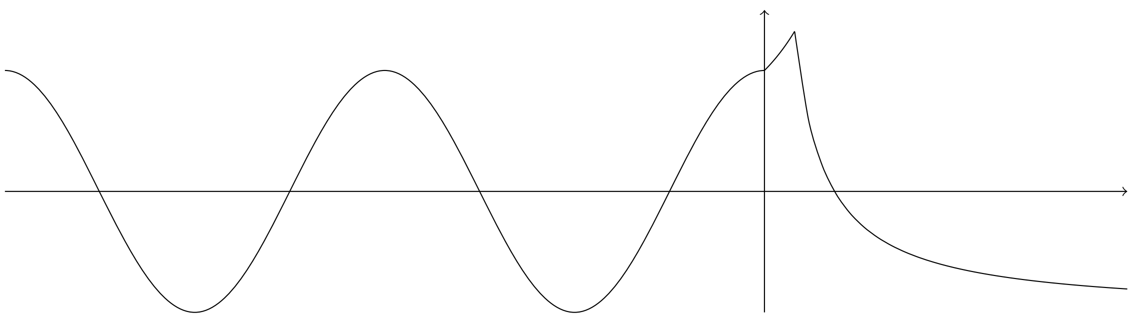
La valeur maximale (resp. minimale) prise par $a(x)$ lorsque x décrit $[-4\pi, 0]$ est 2 (resp. -2).

$x \mapsto c(x)$



La fonction c est strictement décroissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 6]$. Par conséquent, la valeur maximale (resp. minimale) prise par $c(x)$ lorsque x décrit $[\frac{1}{2}, 6]$ est $c(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} + 1$ (resp. $c(6) = \frac{\sqrt{e}+3}{12} - 2$).

3) Le graphe de f est le suivant :



Les intervalles où f est croissante sont $[-3\pi, -2\pi]$ et $[-\pi, \frac{1}{2}]$.
Les intervalles où f est décroissante sont $[-4\pi, -3\pi]$, $[-2\pi, -\pi]$ et $[\frac{1}{2}, 6]$.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont :

$$-\frac{7\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{e}+3}{4}.$$

4) On remplace maintenant les intervalles $[-4\pi, 0]$ et $[\frac{1}{2}, 6]$ respectivement par $]-\infty, 0]$ et $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Alors f n'a pas de limite en $-\infty$, car $x \mapsto 2\cos(x)$ n'a pas de limite en $-\infty$. Par contre, f admet une limite en $+\infty$, égale à -2.

Corrigé de l'exercice 3 Voir le cours !