Contrôle du 4 novembre 2014 — Durée : 1h

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Sauf mention explicite du contraire, chacune de vos réponses doit être argumentée.

Exercice 1
Calculer les limites suivantes, si elles existent :

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad d)\ \lim_{x\to +\infty} \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 2
On considère la fonction $f : [-4\pi, 6] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a(x) = 2\cos(x) & \text{si } x \in [-4\pi, 0] \\ b(x) = e^x + 1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ c(x) = \frac{\alpha}{x} - 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 6] \end{cases}$$

où α est un réel choisi de telle sorte que

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} b\left(\frac{1}{2}\right) = c\left(\frac{1}{2}\right)$$

(c'est-à-dire que la fonction f est continue).

1) Quelle est la valeur de α ? (aucune justification n'est demandée).
2) Dessiner le graphe de la fonction a, et celui de la fonction c. On précisera les valeurs maximales et les valeurs minimales atteintes par $a(x)$ lorsque x décrit $[-4\pi, 0]$, et par $c(x)$ lorsque x décrit $[\frac{1}{2}, 6]$.
3) Dessiner ensuite le graphe tout entier de la fonction f. On précisera d'une part les intervalles où f est croissante, d'autre part ceux où f est décroissante, ainsi que les solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
4) On remplace maintenant les intervalles $[-4\pi, 0]$ et $[\frac{1}{2}, 6]$ respectivement par $]-\infty, 0]$ et $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Que pouvez vous dire des limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?

Exercice 3
Démontrer la proposition suivante :

$$\left(f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \right) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell.$$