

Licence MIAHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Examen partiel numéro 1 du 28 novembre 2013

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Un formulaire de DL se trouve en page 2

Exercice 1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 4 \cos x}{2x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 1}.$$

Exercice 2-a. Calculer le domaine de définition et de continuité de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

b. On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que g est continue sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 3. Étudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de

$$f(x) = \sqrt{\log x}.$$

Exercice 4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

Exercice 5. Calculer les développements limités en 0, à l'ordre 2, de $\sqrt{1+x} - e^x$, puis celui à l'ordre 3 de $\frac{\sin x}{1-x}$.

Exercice 6. Montrer, en revenant à la définition des limites avec les ε , que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x \cos x}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)\end{aligned}$$

Licence MIAHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Corrigé de l'examen partiel numéro 1 du 28 novembre 2013

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Un formulaire de DL se trouve en page 2

Exercice 1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 4 \cos x}{2x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 1}.$$

Corrigé. Première limite. On a

$$\frac{3x^3 + 4 \cos x}{2x^3} = \frac{3}{2} + \frac{2 \cos x}{x^3}.$$

- Le premier terme du membre de droite tend vers $\frac{3}{2}$.

- Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$-\frac{2}{x^3} \leq \frac{2 \cos x}{x^3} \leq \frac{2}{x^3}.$$

Les deux termes à gauche et à droite $\pm \frac{2}{x^3}$ tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc par le théorème des gendarmes le terme du milieu tend aussi vers 0.

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 4 \cos x}{2x^3} = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$$

Deuxième limite. Le numérateur tend (par continuité d'un polynôme) vers $2^2 + 2 = 6$, alors que le dénominateur tend vers $2^2 - 2 - 1 = 1$. Par propriété d'une limite quotient, il ne s'agit pas là d'une forme indéterminée, et on a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Exercice 2-a. Calculer le domaine de définition et de continuité de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

b. On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé du a). puisque $1 + x^2 > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, le numérateur est défini sur $\mathbb{R}$, donc

$$D_f = \mathbb{R}^*.$$

Étudions maintenant la continuité de f sur D_f . Nous allons montrer que f est continue sur D_f tout entier.

Étude du numérateur. La fonction $\sqrt{1+x^2} - 1$ sera continue là où $\sqrt{1+x^2}$ l'est. Or, celle-ci est la composée de :

- $u : x \mapsto 1 + x^2$, continue sur $\mathbb{R}$, donc sur D_f ;
- $v : t \mapsto \sqrt{t}$, continue sur $J = \mathbb{R}_+^*$;
- on a $u(D_f) \subset J = \mathbb{R}_+^*$.

Donc, par continuité d'une composée, le numérateur est continu sur D_f .

Étude du dénominateur. La fonction $x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur D_f .

Conclusion. Puisque le numérateur et le dénominateur sont continus sur D_f , et puisque le dénominateur ne s'annule pas sur D_f , le quotient est continu sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

Corrigé du b). Puisque $g = f$ sur $\mathbb{R}^*$, g est définie et continue sur cet ensemble. D'autre part, g est évidemment définie en 0 (puisque $g(0) = \frac{1}{2}$ existe), il ne reste donc plus qu'à vérifier que g est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = g(0) = \frac{1}{2}$. Cela se prouve à l'aide de la quantité conjuguée. On a, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} &= \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \frac{(1+x^2) - 1^2}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1}. \end{aligned}$$

Par continuité, on a bien que cette quantité tend, lorsque $x \rightarrow 0$, vers $\frac{1}{\sqrt{1+0^2}+1} = \frac{1}{2} = g(0)$, donc g est aussi continue en 0, donc g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Étudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de

$$f(x) = \sqrt{\log x}.$$

Corrigé. Domaine de définition. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ est défini si et seulement si :

- $\log x$ est défini, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$;
- $\sqrt{\log x}$ est défini, c'est-à-dire si et seulement si $\log x \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq 1$

Donc $D_f = [1, +\infty[$.

Étude du domaine de continuité de f . Nous allons montrer que f est continue sur $D_f = [1, +\infty[$. La fonction $f(x)$ est la composée de :

- $u : x \mapsto \log x$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur D_f ;
- $v : t \mapsto \sqrt{t}$, continue sur $J = \mathbb{R}_+$;
- on a $u(D_f) \subset J = \mathbb{R}_+$.

Donc, par continuité d'une composée, f est continue sur D_f .

Étude du domaine de dérivabilité de f . Nous allons montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[\subset D_f$.
 La fonction $f(x)$ est la composée de :

- $u : x \mapsto \log x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $]1, +\infty[$;
- $v : t \mapsto \sqrt{t}$, dérivable sur $K = \mathbb{R}_+^*$;
- on a $u(]1, +\infty[) \subset K = \mathbb{R}_+^*$.

Donc, par dérivabilité d'une composée, f est dérivable sur $]1, +\infty[\subset D_f$.

Remarque. f n'est pas dérivable en 1, puisque $v(t) = \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en $t = 0$, alors que $\log 1 = 0$.

Exercice 4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

Corrigé. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On applique la règle de l'hospital. On pose

$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = \sin x.$$

Il s'agit là de deux fonctions dérivables en 0, avec $f'(0) = e^0 = 1$ et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$. Puisque $g'(0) = 1 \neq 0$, la règle de l'hospital s'applique, et donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exercice 5. Calculer les développements limités en 0, à l'ordre 2, de $\sqrt{1+x} - e^x$, puis celui à l'ordre 3 de $\frac{\sin x}{1-x}$.

Corrigé. La somme. On a d'après le formulaire (pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}$) :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{1+x} - e^x = -\frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Le produit. On a $\frac{\sin x}{1-x} = \sin x \times \frac{1}{1-x}$, donc d'après le formulaire :

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x), \end{aligned}$$

donc on trouve, en tronquant en degré 3 :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1-x} &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)(1+x+x^2+x^3) + x^3\varepsilon(x) \\ &= x + x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\ &= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Exercice 6. Montrer, en revenant à la définition des limites avec les ε , que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x \cos x}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Corrigé. On commence par calculer

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3 + x \cos x}{2x^3} - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{(x^3 + x \cos x) - x^3}{2x^3}\right| \\ &= \left|\frac{x \cos x}{2x^3}\right| \\ &= \frac{|\cos x|}{2x^2} \\ &\leq \frac{1}{2x^2}.\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. On a $\frac{1}{2A^2} = \varepsilon$ pour $A = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$. On pose donc $A = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, et vérifions que ce A convient. Soit donc $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, et supposons que $x > A$. Alors

$$\left|\frac{x^3 + x \cos x}{2x^3} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2x^2} < \frac{1}{2A^2} = \varepsilon,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \\ \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$$

Licence MIASHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Examen partiel numéro 2 du 20 décembre 2013

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \\
 \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ (si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ constante)} \\
 \exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)
 \end{aligned}$$

Exercice 1. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1+x} - \cos x \text{ à l'ordre } 3; \cos x \times e^{-x} \text{ à l'ordre } 3; \\
 &\sqrt{1 + \log(1+x)} \text{ à l'ordre } 3; \frac{e^x}{\cos x} \text{ à l'ordre } 2;
 \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sin x \log(1-x)}{\cos x - 1}; \frac{\sin 3x}{\log(1-x)}; \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}; \frac{(e^x - 1)(\cos x - 1)}{\log(1+x^3)}.$$

Exercice 3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x+1} \log \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\sqrt[3]{1+x^3} - x)$.

Licence MIASHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Corrigé de l'examen partiel numéro 2 du 20 décembre 2013

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \\
 \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ (si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ constante)} \\
 \exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)
 \end{aligned}$$

Exercice 1. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1+x} - \cos x \text{ à l'ordre 3 ; } \cos x \times e^{-x} \text{ à l'ordre 3 ;} \\
 &\sqrt{1 + \log(1+x)} \text{ à l'ordre 3 ; } \frac{e^x}{\cos x} \text{ à l'ordre 2 ;}
 \end{aligned}$$

Corrigé. La somme. On a d'après le formulaire :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x),
 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{1+x} - \cos x = -x + \frac{3}{2}x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x).$$

Le produit. On a d'après le formulaire :

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x),\end{aligned}$$

donc on trouve, en tronquant en degré 3 :

$$\begin{aligned}\cos x \times e^{-x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 - x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

donc

$$\cos x \times e^{-x} = 1 - x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

Le DL composé. On a

$$\sqrt{1 + \log(1+x)} = \sqrt{1+t}$$

avec $t = \log(1+x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. On peut donc faire un DL composé. D'après le formulaire :

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\ \sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + t^3\varepsilon(t),\end{aligned}$$

donc on trouve, en tronquant en degré 3 :

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \log(1+x)} &= 1 + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)}{2} - \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2}{8} + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).\end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{17}{48}$. Donc

$$\sqrt{1 + \log(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Le quotient. **Premier temps : calcul de $\frac{1}{\cos x}$.** On a d'après le formulaire

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)},$$

où $t = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. On peut donc calculer $\frac{1}{\cos x}$ par un DL composé. D'après le formulaire,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^2\varepsilon(t)$$

donc en tronquant en degré 2 :

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

Second temps : calcul du produit. On a en tronquant en degré 2 :

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{\cos x} &= e^x \times \frac{1}{\cos x} \\ &= e^x \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) \\ &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{\cos x} &= 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x). \\ \frac{e^x}{\cos x} &= e^x \times \frac{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{}, \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sin x \log(1-x)}{\cos x - 1}; \frac{\sin 3x}{\log(1-x)}; \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}; \frac{(e^x - 1)(\cos x - 1)}{\log(1+x^3)}.$$

Corrigé. Première limite. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Si on veut utiliser les équivalents, on a d'après le formulaire :

$$\begin{aligned} \log(1-x) &= -x + x\varepsilon(x) \\ \sin x &= x + x\varepsilon(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \log(1-x) &\sim -x \\ \sin x &\sim x \\ \cos x - 1 &\sim -\frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Puisqu'on peut multiplier et diviser des équivalents, on en déduit que

$$\frac{\sin x \log(1-x)}{\cos x - 1} \sim \frac{x \times (-x)}{-\frac{x^2}{2}} = 2,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin x \log(1-x)}{\cos x - 1} = 2$$

puisque deux fonctions équivalentes ont même limite.

Remarque. Si on avait voulu utiliser les DL, il aurait fallu faire des DL du numérateur et du dénominateur à l'ordre 2. Après calculs, on arriverait à :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x \log(1-x)}{\cos x - 1} &= \frac{-x^2 + x^2 \varepsilon(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)} \\ &= \frac{-1 + \varepsilon(x)}{-\frac{1}{2} + \varepsilon(x)} \\ &\rightarrow \frac{-1}{-\frac{1}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Deuxième limite. Il s'agit encore d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut appliquer la règle de l'hospital pour $f(x) = \sin 3x$ et $g(x) = \log(1-x)$, puisque ces deux fonctions sont dérivables en 0, avec $g'(0) = -1 \neq 0$. On trouve que la limite vaut $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{3}{-1} = -3$.

On peut aussi faire des DL d'ordre 1 du numérateur et du dénominateur (comme à chaque fois que la règle de l'hospital s'applique). On peut aussi raisonner par équivalents : on déduit du formulaire que

$$\begin{aligned} \sin 3x &\sim 3x \\ \log(1-x) &\sim -x. \end{aligned}$$

Puisqu'on peut multiplier et diviser des équivalents, on en déduit que

$$\frac{\sin 3x}{\log(1-x)} \sim \frac{3x}{-x} = -3,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin 3x}{\log(1-x)} = -3$$

puisque deux fonctions équivalentes ont même limite.

Troisième limite. Il ne s'agit PAS d'une forme indéterminée ! Par continuité du cosinus en 0, le numérateur tend vers $\cos 0 = 1$ et par continuité de la racine carrée en 1, le dénominateur tend vers $\sqrt{1+0} = 1$. Donc par propriétés des limites, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Quatrième limite. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On a tout intérêt à utiliser les équivalents : par les DL, il faudrait faire des DL du numérateur et du dénominateur à l'ordre 3. On a d'après le formulaire

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\varepsilon(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ \log(1 + x^3) &= x^3 + x^3\varepsilon(x), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\sim x \\ \cos x - 1 &\sim -\frac{x^2}{2} \\ \log(1 + x^3) &\sim x^3. \end{aligned}$$

Puisqu'on peut multiplier et diviser des équivalents, on en déduit que

$$\frac{(e^x - 1)(\cos x - 1)}{\log(1 + x^3)} \sim \frac{x \times \left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^3} = -\frac{1}{2},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{(e^x - 1)(\cos x - 1)}{\log(1 + x^3)} = -\frac{1}{2}$$

puisque deux fonctions équivalentes ont même limite.

Exercice 3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x+1} \log \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\sqrt[3]{1+x^3} - x)$.

Corrigé. Première limite. Il s'agit d'une forme indéterminée $\infty \times \log 1 = \infty \times 0$. On va utiliser les équivalents.

Le terme de gauche ne pose pas de problème : on a $x^3 + 1 \sim x^3$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ (puisque le rapport $\frac{x^3+1}{x^3} = 1 + \frac{1}{x^3}$ tend vers 1), et $x + 1 \sim x$ (car le rapport tend vers 1) donc

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} \sim \frac{x^3}{x} \sim x^2$$

au voisinage de $+\infty$.

On obtiendra un équivalent **du terme de droite** $\log \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en posant $t = \frac{1}{x}$ qui tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. On peut donc utiliser les DL en $t = 0$ du formulaire. On obtient :

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x),$$

donc puisque $u = -\frac{1}{2x^2}$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}\log \cos\left(\frac{1}{x}\right) &= \log\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right) \\ &= -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x) \\ &\sim -\frac{1}{2x^2}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{x^3+1}{x+1} \log \cos\left(\frac{1}{x}\right) \sim x^2 \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x+1} \log \cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$$

puisque deux fonctions équivalentes ont même limite.

Deuxième limite. Le terme entre parenthèse est déjà une forme indéterminée $\infty - \infty$. On va estimer ce terme en mettant x en facteur pour se ramener en 0 et pouvoir faire des DL. On utilisera que si $t \rightarrow 0$, alors

$$\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{t}{3} + t\varepsilon(t).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}x^2(\sqrt[3]{1+x^3} - x) &= x^2 \times x \times \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - 1\right) \\ &= x^3 \left(1 + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x) - 1\right) \\ &= \frac{1}{3} + \varepsilon(x),\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(\sqrt[3]{1+x^3} - x) = \frac{1}{3}.$$

Licence MIAHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Examen Terminal du 6 janvier 2014

En deux heures, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

L'énoncé comporte un recto et un verso

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \\
 \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2 \times 3} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \\
 \exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)
 \end{aligned}$$

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\log x}$.

Exercice 2. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 e^x - \sqrt{1-x} &\text{ à l'ordre 3; } & \cos x \times \sqrt[3]{1+x} &\text{ à l'ordre 2; } \\
 \frac{e^x}{\cos x} &\text{ à l'ordre 2; } & (\cos x)^{\sin x} &\text{ à l'ordre 3.}
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{e^x - \cos x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}; \quad \frac{\sin x (e^x - 1)}{\cos x - 1}; \quad \frac{e^x}{1 + \cos x}; \quad \frac{\sin x - x}{(\cos x - 1) \log(1-x)}$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$:

$$x^2 \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right); \quad \frac{\sqrt{2 + \cos x}}{\log x}; \quad \left(1 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^x.$$

Exercice 5. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$ pour

$$f(x) = (\cos x)^{\cos x}.$$

Exercice 6. Montrer que les premiers termes du développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction suivante sont

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 7. Montrer, en utilisant la définition de la limite avec ϵ , que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - \cos x}{2x + 3} = 2.$$

Exercice 8-a. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$, tel que $f(x) = 0$.

[Indication : on rappelle le théorème des valeurs intermédiaires : si $a, b \in \mathbb{R}$, si f est continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe $c \in [a, b]$, telq que $f(c) = 0$.]

8-b. Montrer que l'équation $\sin x = \log x$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Licence MIASHS première année, UE Analyse S1 MI0A01X. Cours : Marc Perret

Examen Seconde session du 19 juin 2014

En deux heures, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

L'énoncé comporte un recto et un verso

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \\
 \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x) \\
 \exp x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)
 \end{aligned}$$

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{\log(x-2)}$.

Exercice 2. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 &\sqrt[3]{1+x} - \frac{1}{1-x} \text{ à l'ordre 3; } \quad \frac{e^x}{1-x^2} \text{ à l'ordre 2;} \\
 &\frac{\log x}{1+x \cos x} \text{ à l'ordre 2; } \quad (1+x)^{\log(1+x)} \text{ à l'ordre 2.}
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\cos x - 1}{\sin x \times \log(1-x)}; \quad \frac{\sin x - \log(1-x)}{x}; \quad \frac{\sin x - x}{\sqrt{1-x^3} - 1}; \quad \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x}}.$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$:

$$x^2(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1); \quad (x+1)^{\frac{1}{\log x}}.$$

Exercice 5. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ pour

$$f(x) = (1 + \sin x)^{e^x}.$$

Exercice 6. Montrer, en revnant à la définition avec les ε , que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - 1}{3x - 2} = \frac{5}{3}.$$

Exercice 7. Montrer que les premiers termes du développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction suivante sont

$$\sqrt{x^2 - 1} \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$