Annexe E

annales de l'année universitaire 2012-2013

Tous les exercices de cette section constituent le devoir à rendre pour le 01 décembre 2013, comme annoncé dans l'introduction et en annexe A.

E.1 Examen partiel du 7 décembre 2012

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\log(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\exp x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition de

$$f(x)=\frac{\log\left(x^2-3x+2\right)}{\sqrt{x-1}}.$$

Exercice 2. Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2\sin x+\cos x}{3x^3}; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2+x+2}.$$

Exercice 3. Calculer le domaine de définition et de continuité de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?

Exercice 4. Étudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de

$$f(x) = \cos(\log x).$$

Exercice 5. Calculer les développements limités en 0, à l'ordre 2, de $\log(1-x) + \frac{1}{1+x}$, puis celui à l'odre 3 de $\sqrt{1+x}.\sin x$.

Exercice 6. Montrer, en revenant à la définition des limites avec les ε, que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2+1} = 1$.

E.2 Examen partiel du 20 décembre 2012

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\log(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\exp x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\log(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\exp x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice 1. Écrire les développements limités en $x=0$ et à l'ordre indiqué entre parenthèses des expressions suivantes :

$$x\sin x-\frac{1}{1-x^2} \text{ à l'ordre } 4\,;\ \sin x\times\sqrt{1-x} \text{ à l'ordre } 3\,;$$

$$\sqrt[3]{1+\sin x} \text{ à l'ordre } 2\,;\ \frac{\log(1-x)}{1+\log(1+x)} \text{ à l'ordre } 2\,;$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{e^x-1};\ \frac{\cos 2x-1}{\sin^2(\log(1-x))};\ \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}};\ \frac{\log(1+x)-x}{\sqrt{1-x^2}-1}.$$

Exercice 3. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}\log(1+\frac{2}{x})$ et $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\times\sqrt{x^2+1}$.

E.3 Examen final du 7 janvier 2013

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\log(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\exp x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de $f(x) = \frac{\sin x \times \log(x^2-9)}{x^2-1}$.

Exercice 2. Montrer que l'équation $\log x = x^2 - 2$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué des expressions suivantes :

$$\sin x + \sqrt{1+x} \text{ à l'ordre } 3\,; \qquad \sqrt[3]{1-x} \times e^x \text{ à l'ordre } 2\,;$$
$$\frac{e^x}{1+\sin x} \text{ à l'ordre } 2\,; \qquad (1+x)^{\cos x} \text{ à l'ordre } 3.$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}; \quad \frac{e^x-1}{\log(1-x)}; \quad \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+x}}; \quad \frac{(\cos x-1)^3}{\sin x - x}$$

ainsi que celle de $\frac{(\sin x)^x - 1}{x \log x}$ en 0^+.

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$:

$$\frac{x^3-\sqrt{x}}{\log^2 x}; \quad \frac{\log(2+\cos x)}{x}; \quad \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}.$$

Exercice 6. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ pour

$$f(x) = (\cos x)^{1+x}.$$

Exercice 7. Montrer que $(1+x)^{\sin x} - 1 \sim x^2$ au voisinage de 0.

Exercice 8. Montrer que les premiers termes du développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction suivante sont

$$x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

E.4 Corrigé de l'examen final du 7 janvier 2013

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de $f(x) = \frac{\sin x \times \log(x^2-9)}{x^2-1}$.

Corrigé. Puisque $\sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, f est définie en x si, et seulement si, $\log(x^2-9)$ l'est ET $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à dire si et seulement si $x^2 - 9 = (x-3)(x+3) > 0$ et $x^2 \neq 1$, c'est-à dire si et seulement si $x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$ et $x \neq \pm 1$. Donc $\boxed{D_f =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[.}$

Continuité. $f(x)$ est le quotient de $\sin x \times \log(x^2-9)$ par $x^2 - 1$.

Étude du numérateur. Puisque $\log(x^2-9)$ est la composée de :
- $x \mapsto x^2 - 9$, continue sur $\mathbb{R}$;

- $t \mapsto \log t$, continue en $t > 0$, en particulier en $t = x^2 - 9$ lorsque $x^2 - 9 > 0$, c'est-à dire lorsque $x \in D_f$.
Donc par composition, $\log(x^2 - 9)$ est continue sur D_f. Puisque $\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc à fortiori sur D_f, on en déduit que le produit $\sin x \times \log(x^2 - 9)$ est continu sur D_f.

Étude du quotient.
- On vient de voir que le numérateur est continu sur D_f.
- le dénominateur $x^2 - 1$ est continu sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur D_f, et
- ne s'annule pas sur D_f,

donc le quotient est continu sur D_f. $\boxed{f(x) \text{ est continue sur } D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[.}$

Dérivabilité. Étude du numérateur. Puisque $\log(x^2 - 9)$ est la composée de :
- $x \mapsto x^2 - 9$, dérivable sur $\mathbb{R}$;
- $t \mapsto \log t$, dérivable en $t > 0$, en particulier en $t = x^2 - 9$ lorsque $x^2 - 9 > 0$, c'est-à dire lorsque $x \in D_f$.

Donc par composition, $\log(x^2 - 9)$ est dérivable sur D_f. Puisque $\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc à fortiori sur D_f, on en déduit que le produit $\sin x \times \log(x^2 - 9)$ est dérivable sur D_f.

Étude du quotient.
- On vient de voir que le numérateur est dérivable sur D_f.
- le dénominateur $x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur D_f, et
- ne s'annule pas sur D_f,

donc le quotient est dérivable sur D_f.

$\boxed{f(x) \text{ est dérivable sur } D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[.}$

Exercice 2. Montrer que l'équation $\log x = x^2 - 2$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiares à la fonction

$$f(x) = x^2 - 2 - \log x$$

pour montrer que celle-ci s'annule au moins une fois sur son domaine de définition, et donc que l'équation proposée possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est définie et continue (comme somme de fonctions continues) sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $f(1) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiates appliqué sur l'intervalle $[1, +\infty[$, il existe au moins un $c \in [1, +\infty[$, tel que $f(c) = 0$, ce qu'il fallait prouver.

Remarque. Le théorème des valeurs intermédiaires montre aussi qu'il existe au moins un $c' \in]0, 1]$, tel que $f(c') = 0$.

Exercice 3. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué des expressions suivantes :

$$\sin x + \sqrt{1+x} \text{ à l'ordre } 3\,; \qquad \sqrt[3]{1-x} \times e^x \text{ à l'ordre } 2\,;$$
$$\frac{e^x}{1+\sin x} \text{ à l'ordre } 2\,; \qquad (1+x)^{\cos x} \text{ à l'ordre } 3.$$

Corrigé. Premier DL, à l'ordre 3. D'après le formulaire :

$$\begin{cases} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \end{cases}$$

donc par sommation

$$\sin x + \sqrt{1+x} = 1 + (1+\frac{1}{2})x - \frac{1}{8}x^2 + (-\frac{1}{6} + \frac{x^3}{16})x^3 + o(x^3),$$

soit

$$\boxed{\sin x + \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3).}$$

<u>Deuxième DL, à l'ordre 2.</u> D'après le formulaire :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{1+x} & = & 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2) \\ e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases}$$

donc par produit

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} \times e^x &= \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)\right) \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3}\right) - \frac{x^2}{9} + o(x^2) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\sqrt[3]{1+x} \times e^x = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{18}x^2 + o(x^2).}$$

<u>Troisième DL, à l'ordre 2.</u> On commence par calculer le DL à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+\sin x}$, que l'on multipliera par celui de e^x. En cours de calcul, on posera $t = x + o(x^2)$, qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0$, dans le DL d'ordre 2

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$$

et on ne gardera que les termes d'ordre inférieurs ou égaux à 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sin x} &= \frac{1}{1+x+o(x^2)} \\ &= 1 - x + x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Puis on calcule le produit :

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+\sin x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\ &= (1 + x + \frac{x^2}{2}) + (-x - x^2) + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{e^x}{1+\sin x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).}$$

<u>Quatrième DL, à l'ordre 3.</u> : Par définition de la puissance, on a :

$$(1+x)^{\cos x} = \exp\left(\cos x \times \log(1+x)\right).$$

Commençons par calculer le DL à l'ordre 3 du produit $\cos x \times \log(1+x)$.

$$\begin{aligned}
\cos x \times \log(1+x) &= (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \times (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \\
&= (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Remarque : Il ne faut SURTOUT PAS écrire le DL de $\cos x$ à l'ordre 2 seulement. Même si le résultat final est juste, le raisonnement est faux : un DL d'ordre 2 fois un DL d'ordre 3 ne donne que le DL D'ORDRE 2 du produit !

On peut maintenant calculer le DL de la composée, en posant $t = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0$ et en utilisant le DL d'ordre 3

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\cos x} &= \exp(\cos x \times \log(1+x)) \\
&= \exp\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}{6} + o(x^3)
\end{aligned}$$

soit en ne gardant que les termes d'ordre inférieur à 3 :

$$\boxed{(1+x)^{\cos x} = 1 + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3).}$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}; \quad \frac{e^x - 1}{\log(1-x)}; \quad \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+x}}; \quad \frac{(\cos x - 1)^3}{\sin x - x}$$

ainsi que celle de $\frac{(\sin x)^x - 1}{x \log x}$ en 0^+.

Corrigé. Première limite. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On a, en effectuant des DL à l'ordre 1 au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}-1} &= \frac{x + o(x)}{1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1} \\
&= \frac{x(1+o(1))}{x(\frac{1}{2} + o(1))} \\
&= \frac{1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} \\
&\to \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}=2.}$$

Remarque. Si on veut utiliser les équivalents, c'est presque pareil. Le DL à l'ordre un $\log(1+x) = x + o(x)$ montre que

$$\log(1+x) \sim x;$$

celui du dénominateur $\sqrt{1+x} = 1 \sim \frac{x}{2} + o(x)$ montre que

$$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}.$$

Donc par quotient

$$\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}-1} \sim \frac{x}{\frac{x}{2}} \sim 2$$

et donc la limite est bien 2.

Deuxième limite. Il s'agit encore d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On a, en effectuant des DL à l'ordre 1 au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1}{\log(1-x)} &= \frac{1+x+o(x)-1}{-x+o(x)}\\ &= \frac{x(1+o(1))}{x(-1+o(1))}\\ &= \frac{1+o(1)}{-1+o(1)}\\ &\to \frac{1}{-1}\\ &= -1\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\log(1-x)}=-1.}$$

Remarque. Si on veut utiliser les équivalents, c'est presque pareil. Le DL à l'ordre un $e^x = 1 + x + o(x)$ montre que

$$e^x - 1 \sim x;$$

celui du dénominateur $\log(1-x) = -x + o(x)$ montre que

$$\log(1-x) \sim -x.$$

Donc par quotient

$$\frac{e^x-1}{\log(1-x)} \sim \frac{x}{-x} \sim -1$$

et donc la limite est bien -1.

Troisième limite. Il s'agit PAS d'une forme indéterminée : le numórateur tend vers 1, ainsi que le dénominateur, de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+x}} &\to \frac{1}{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{1+x}} = 1.}$$

Quatrième limite. Il s'agit encore encore d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On a, en effectuant des DL cette fois à l'ordre 6 au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{(\cos x-1)^3}{\sin x - x} &= \frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)-1)^3}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)-x}\\ &= \frac{x^6(-\frac{1}{8}+o(1))}{x^3(-\frac{1}{6}+o(x^3))}\\ &= x^3\frac{-\frac{1}{8}+o(1)}{-\frac{1}{6}+o(1)}\\ &\to 0\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)^3}{\sin x - x} = 0.}$$

Remarque. Si on veut utiliser les équivalents, c'est presque pareil. Le DL à l'ordre un $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ montre que

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2},$$

c'est-à dire par multiplicativité

$$(\cos x - 1)^3 \sim -\frac{x^6}{8},$$

celui du dénominateur $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ montre que

$$\sin x - x \sim -\frac{x^3}{6}.$$

Donc par quotient

$$\frac{(\cos x-1)^3}{\sin x - x} \sim \frac{-\frac{x^6}{8}}{-\frac{x^3}{6}} \sim \frac{3}{4}x^3$$

et donc la limite est bien 0.

Cinquième limite. Il s'agit encore encore d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Il est dans ce cas bien plus commode d'utiliser les équivalents, puisque $\log x$ n'admet pas de DL en 0, où elle n'est même pas définie.

<u>Numérateur.</u> On a

$$\begin{aligned}
(\sin x)^x &= \exp(x\log(\sin x)) \\
&= \exp(x\log(x+o(x^2)) \\
&= \exp(x\log x + x\log(1+o(x))) \\
&= \exp(x\log x + xo(x)) \\
&= \exp(x\log x + o(x^2))
\end{aligned}$$

d'où, en posant $t = x\log x + o(x^2) \to 0$ lorsque $x \to 0$ dans le DL $\exp(t) = 1 + t + o(t)$:

$$(\sin x)^x = 1 + x\log x + o(x^2) + o(x\log x + o(x^2)) = 1 + x\log x + o(x\log x)$$

puisque $o(x^2)$ est un $o(x\log x)$ (le rapport $\frac{o(x^2)}{x\log x}$tends vers 0). Donc

$$(\sin x)^x - 1 \sim x\log x,$$

ainsi

$$\frac{(\sin x)^x - 1}{x\log x} \sim \frac{x\log x}{x\log x} \sim 1,$$

soit

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^x - 1}{x\log x} = 1.}$$

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$:

$$\frac{x^3 - \sqrt{x}}{\log^2 x}; \quad \frac{\log(2+\cos x)}{x}; \quad \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}.$$

Corrigé.
Première limite. Il s'agit déjà pour le numérateur d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - \sqrt{x}}{\log^2 x} &= \frac{x^3}{(\log x)^2} \times (1 - \frac{\sqrt{x}}{x^3}) \\
&= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\log x}\right)^2 \times (1 - \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}).
\end{aligned}$$

Le terme $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\log x}$, à priori une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, tend en fait vers $+\infty$ d'après les puissances comparées, donc son carré aussi. Le terme $1 - \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ tend vers 1, donc

$$\boxed{lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - \sqrt{x}}{\log^2 x} = +\infty.}$$

Remarque. Si on veut utiliser les équivalents, on écrit $x^3 - \sqrt{x} \sim x^3$ au voisinage de $+\infty$, donc par quotient

$$\frac{x^3 - \sqrt{x}}{\log^2 x} \sim \frac{x^3}{(\log x)^2} = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\log x}\right)^2,$$

qui tend vers $0^2 = 0$ par puissances comparées.

Deuxième limite. Il ne s'agit PAS d'une forme indéterminée : le numérateur n'a pas de limite en $+\infty$, puisque $\cos x$ oscille entre -1 et 1. On va utiliser le théorème des gendarmes. Des inégalités

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

on dénduit

$$1 \leq 2 + \cos x \leq 3,$$

d'où pour $x > 0$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2 + \cos x}{x} \leq \frac{3}{x}.$$

Les termes de gauche et de droite ont pour limite 0 en $+\infty$, donc par le théorème des gendarmes celui du milieu aussi. On a donc

$$\boxed{lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{x} = 0.}$$

Troisième limite. Puisque $\frac{1}{x}$ tend vers 0, on a par continuité de cos en 0 que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ tends vers $\cos 0 = 1$ et par continuité de log en 1, on a $\log\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to \log 1 = 0$. D'autre part, $x^2 \to +\infty$. Donc

$$\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \times \log\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \to \exp(\infty \times 0),$$

ce qui est une forme indéterminée $0 \times \infty$ à l'intérieur de exp.

Pour lever l'indétermination, nous allons effectuer un DL de la quantité ci-dessus à l'intérieur de exp. Posons $t = \frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. On a

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

que l'on injecte dans le DL $\log(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ avec $u = \frac{t^2}{2}$, ce qui donne

$$x^2 \times \log\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{t^2} \times \left(-\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi, on a par continuité de exp en $-\frac{1}{2}$:

$$\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \times \log\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \to \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$\boxed{lim_{x \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.}$$

Exercice 6. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ pour

$$f(x) = (\cos x)^{1+x}.$$

Corrigé. Le calcul explicite de $f'(x)$ et de $f''(x)$ est bien trop fastidieux ; nous rappelons que la dérivée de $(u(x))^{v(x)}$, lorsqu'elle existe, est très laide. Il faut utiliser les règles de dérivation d'un produit et d'une composée à

$$(u(x))^{v(x)} = \exp\left(v(x) \times \log\left(u(x)\right)\right)$$

c'est-à dire ici

$$(\cos x)^{1+x} = \exp\left((1+x) \times \log\left(\cos x\right)\right).$$

La méthode consiste à calculer le DL de $f(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 de deux façons différentes : d'abord par le calcul, puis par la formule de Taylor-Young. On en déduira par unicité du DL d'ordre deux que ceux-ci sont égaux, ce qui donnera les dérivées cherchées avec ÉNORMÉMENT MOINS de calculs que si on les faisait "à la main".

Premier calcul. En posant en cours de calcul $t = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \to 0$ lorsque $x \to 0$ dans le DL $\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, puis $u = -\frac{x^2}{2}$ qui tend lui aussi vers 0 lorsque $x \to 0$ dans le DL $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$:

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{1+x} &= \exp\left((1+x) \times \log\left(\cos x\right)\right) \\
&= \exp\left((1+x) \times \log(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))\right) \\
&= \exp\left((1+x) \times \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Second calcul. On a :

- $1+x$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$;
- $\cos x$ de classe $\mathcal{C}^3$ et strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, $\log t$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $t \in]0, +\infty[$, donc $\log(\cos x)$ de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$;

donc par produit $(1+x) \times \log(\cos x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, c'est-à dire sur un voisinage de 0, et finalement puisque exp est $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, on a finalement que

$$f(x) = \exp\left((1+x) \times \log\left(\cos x\right)\right)$$

est $\mathcal{C}^3$ sur ce voisinage de 0 (ouf !), donc par Taylor-Young on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Conclusion. Par unicité du DL d'ordre 2 en 0 de f, on a donc en comparant les deux DL :

$$f(0) = 1; f'(0) = 0; \frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2},$$

c'est-à dire finalement

$$\boxed{f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1.}$$

Exercice 7. Montrer que $(1+x)^{\sin x} - 1 \sim x^2$ au voisinage de 0.

Corrigé. On a, par définition de la fonction puissance, et en effectuant des DL d'ordre deux :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\sin x} &= \exp\left(\sin x \times \log(1+x)\right) \\
&= \exp\left((x + o(x^2)) \times (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))\right) \\
&= \exp\left(x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 + x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

donc

$$(1+x)^{\sin x} - 1 = x^2 + o(x^2),$$

ce qui montre que

$$\boxed{(1+x)^{\sin x} - 1 \sim x^2 \text{ au voisinage de } 0}$$

Exercice 8. Montrer que les premiers termes du développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction suivante sont

$$x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Corrigé. On pose $t = \frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Le DL d'ordre deux au voisinage de 0 de $\cos t$ donne

$$\begin{aligned}
x \cos\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{t} \cos t \\
&= \frac{1}{t} \times \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\
&= \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o(t) \\
&= x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}$$

comme il était demandé.