Annexe D

annales de l'année universitaire 2011-2012

D.1 Examen partiel numéro 1 du 3 novembre 2011

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition de

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

Exercice 2. Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x\cos x + \sin x}{2x^3}; \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}.$$

Exercice 3. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \sqrt{x+4}}{x+1}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}; \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+2x}}{x}.$$

Exercice 4. Étudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de

$$f(x) = (x^2-3)\sqrt{x+1}.$$

Exercice 5. Montrer que l'équation $(x+1)\cos x - \sqrt{x} = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Calculer le domaine de définition et de continuité de $f(x) = \frac{\log(2+\cos x)}{x}$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. Montrer que pour tout x suffisament grand, on a $f(x) > x$.

D.2 Examen partiel numéro 2 du 8 décembre 2011

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\log(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\exp x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice 1. Écrire les développements limités en $x=0$ et à l'ordre indiqué entre parenthèses des expressions suivantes :

$$\log(1+x)-\log(1-x) \text{ à l'ordre } 4\,;\ \cos x\times\log(1-x) \text{ à l'ordre } 4\,;$$

$$\sqrt[3]{\cos x} \text{ à l'ordre } 3\,;\ \frac{\log(1-x)}{\cos x} \text{ à l'ordre } 3\,;$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1};\ \frac{x\sin 2x}{\cos(\log(1-x))-1};\ \frac{e^x}{\cos x};\ \frac{\sin x-x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}.$$

Exercice 3. On suppose que le DL de f en 0 d'ordre n est

$$f(x)=P(x)+x^n\varepsilon(x),$$

avec $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\ldots+a_nx^n$ polynôme de degré n et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Supposons de plus que $a_0=a_1=0$ et que $n\geq 2$. Montrer que le $\mathrm{DL}_{n-2}(0)$ de $\frac{f(x)}{x^2}$ est

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x^2} &= \frac{P(x)}{x^2}+x^{n-2}\varepsilon(x)\\
&= a_2+a_3x+a_4x^2+\ldots+a_nx^{n-2}+x^{n-2}\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Application : donner les $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$ et de $\frac{\log(\cos x)}{x^2}$.

D.3 Examen Terminal du 10 janvier 2012

En deux heures, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

L'énoncé comporte un recto et un verso

Formulaire des DL en 0

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\log(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots-\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)\\
\exp x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x^2-9}\;\; e^x$.

Exercice 2. Montrer que l'équation $e^x = \sqrt{x+1}$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué entre parenthèses des expressions suivantes :

$$\cos x - \sqrt{1+x} \text{ à l'ordre } 2\,; \qquad \log(1-x)\times\sqrt[3]{1+x} \text{ à l'ordre } 2\,;$$

$$\frac{e^x}{\cos x} \text{ à l'ordre } 3\,; \qquad (\cos x)^{\sin x} \text{ à l'ordre } 3.$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1};\quad \frac{e^{\sin x}-1}{\log(1-x)};\quad \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{1+x}};\quad \frac{\sin^2 x}{1-\cos x};\quad \frac{x^{\sin x}-1}{x\log x}.$$

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$:

$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{\log x};\quad \frac{\sqrt{1+\sin x}}{x};\quad \left(1+\frac{2}{x}\right)^x.$$

Exercice 6. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ pour

$$f(x) = (1+\sin x)^{\sqrt{1+x}}.$$

Exercice 7. Montrer que $(\cos x)^{\sin x} \sim e^{-\frac{x^3}{2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 8. Montrer que les premiers termes des développements asymptotiques en $+\infty$ des fonctions suivantes sont

$$\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D.4 Corrigé de l'examen partiel du 3 novembre 2011

Examen partiel numéro 1 du 3 novembre 2011

En une heure, les documents et calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition de

$$f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$$

Corrigé. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a que f est définie en x si, et seulement si $x^2-3x+2 \geq 0$. Pour étudier le signe du binôme, on le factorise. Le discriminant vaut $3^2-4\times1\times2 = 9-8 = 1$ et les deux racines sont 1 et 2, donc $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, qui est positif si et seulement si $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ (un tableau de signes peut-être dressé si on n'est pas sûr de soi). Donc

$$D_f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[.$$

Exercice 2. Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x\cos x+\sin x}{2x^3}; \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}.$$

Corrigé. On a

$$\frac{x^3+x\cos x+\sin x}{2x^3} = \frac{1}{2}+\frac{\cos x}{2x^2}+\frac{\sin x}{2x^3}.$$

Mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $-\frac{1}{2x^2} \leq \frac{\cos x}{2x^2} \leq \frac{1}{2x^2}$, où les deux extrémités tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$. Donc, par le théorème des gendrames, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{2x^2} = 0$.

De la même façon, on a pour tout x les inégalités $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-\frac{1}{2x^3} \leq \frac{\sin x}{2x^3} \leq \frac{1}{2x^3}$ pour tout $x \neq 0$, et par le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{2x^3} = 0$. Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x\cos x+\sin x}{2x^3} = \frac{1}{2}+0+0 = \frac{1}{2}.$$

Concernant le seconde limite, on commence par rappeler que si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x^2} = |x|$. D'autre part, on rappelle aussi que si $x\,0$, on a $\frac{|x|}{x} = 1$. On a donc, pour $x > 0$, en mettant x^2 en facteur dans la racine :

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x} = \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}},$$

avec $\frac{2}{x} \to 0$ et $\frac{2}{x^2} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, donc le terme à l'intérieur de la racine tend vers $1+0+0=1$, et par continuité de la racine carrée en 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} = \sqrt{1} = 1.$$

Une remarque importante, à lire. Dans ces deux exercices, il **ne faut pas** se contenter de dire "on garde les termes de degrés les plus importants" (c'est-à dire $\frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{3}$ pour la première limite, et $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ pour la seconde limite). En effet, cet argument **n'est valable que pour les fractions rationnelles, i.e. les quotients de polynômes.** Hors, aucune de ces deux fonctions n'est un polynôme : la première fait intervenir des sinus et cosinus, la seconde des racines carrées. Il **faut** faire comme dans ce corrigé.

Exercice 3. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sqrt{x+4}}{x+1}; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+2x}}{x}.$$

Corrigé. Le numérateur de $\frac{x^2+\sqrt{x+4}}{x+1}$ tend vers $0+\sqrt{0+4} = 2$ lorsque $x \to 0$ alors que le dénominateur tend vers $0+1=1$. Donc le quotient tend vers $\frac{2}{1} = 2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sqrt{x+4}}{x+1} = 2.$$

Commentaire. Il arrive parfois (mais pas à chaque examen) qu'une limite ne soit pas une forme indéterminée. Commencez donc toujours par vérifier si, comme c'est le cas ici, la limite se calcule sans difficulté.

Lorsque x tend vers 1, les numérateurs et dénominateurs de $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ tendent tous deux vers 0, d'où une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, on factorise les numérateurs et dénominateurs en

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Dans cette dernière expression, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 3, donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{2}{3}.$$

Enfin, lorsque x tend vers 0, les numérateurs et dénominateurs de $\frac{1-\sqrt{1+2x}}{x}$ tendent tous deux vers 0, d'où une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, on multiplie haut et bas par ce qu'on appelle "la quantité conjuguée" :

$$\frac{1-\sqrt{1+2x}}{x} = \frac{(1-\sqrt{1+2x})(1+\sqrt{1+2x})}{x(1+\sqrt{1+2x})} = \frac{1^2-(1+2x)}{x(1+\sqrt{1+2x})} = \frac{-2x}{x(1+\sqrt{1+2x})} = \frac{-2}{1+\sqrt{1+2x}}.$$

Lorsque $x \to 0$, le haut tend vers 2, alors que le bas tend vers $1 + \sqrt{1 + 2 \times 0} = 1$, donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+2x}}{x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Remarquons que pour cette dernière limite, un DL d'ordre 1 des numérateurs et dénominateurs auraient conduits à la même solution.

Exercice 4. Étudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de

$$f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x+1}.$$

Corrigé. $f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x+1}$ est définie si et seulement si $x + 1 \geq 0$, donc

$$D_f = [-1, +\infty[.$$

Puisque $x \mapsto (x^2 - 3)$ est continue sur $\mathbb{R}$, f sera continue par produit de fonctions continues là où $x \mapsto \sqrt{x+1}$ l'est. Puisque $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $t \in [0, +\infty[$, on déduit $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue en x tel que $t = x + 1 \geq 0$, c'est-à dire exactement si $x \in D_f$. Donc f est continue sur $D_f = [-1, +\infty[$.

Enfin, puisque $x \mapsto (x^2 - 3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f sera dérivable par produit de fonctions dérivables là où $x \mapsto \sqrt{x+1}$ l'est. Puisque $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $t \in]0, +\infty[$, on déduit $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable en x tel que $t = x + 1 > 0$, c'est-à dire exactement si $x \in]-1, +\infty[$. Donc f est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Remarque, à lire. Il ne faut pas montrer que f est dérivable en se contentant de le justifier en donnant la formule de la dérivée. **Il faut, avant d'écrire une formule de dérivée, justifier que le calcul est licite. En général, il faut appliquer les propositions selon lesquelles une somme, un produit ou une composée de fonctions continues sont continues.**

Exercice 5. Montrer que l'équation $(x + 1)\cos x - \sqrt{x} = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Corrigé. Posons $f(x) = (x + 1)\cos x - \sqrt{x}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de $\sqrt{x}$, continue sur $\mathbb{R}_+$, et de $(x + 1)\cos x$, continue sur $\mathbb{R}$. On a d'autre part $f(0) = \cos 0 - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1 > 0$, et $f(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} < 0$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tel que $f(c) = 0$.

Exercice 6. Calculer le domaine de définition et de continuité de $f(x) = \frac{\log(2+\cos x)}{x}$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ?

Corrigé. $f(x) = \frac{\log(2+\cos x)}{x}$ est définie si, et seulement si $x \neq 0$ ET $2+\cos x > 0$. Cette dernière condition est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$D_f = \mathbb{R}^*.$$

Pour voir si on peut prolonger f par continuité en 0, on regarde si f a une limite en 0. Lorsque $x \to 0$, le numérateur tend, par continuité de cos en 0 et de log en 3, vers $\log(2 + \cos(0)) = \log 3 > 0$, alors que le dénominateur tend vers 0^+ si $x \to 0^+$ et vers 0^- si $x \to 0_-$. Donc

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(2 + \cos x)}{x} = \frac{\log 3}{0^+} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \frac{\log(2 + \cos x)}{x} = \frac{\log 3}{0^-} = -\infty,$$

donc f n'a pas de limite en 0, donc f ne peut-être prolongée par continuité en 0.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. Montrer que pour tout x suffisament grand, on a $f(x) > x$.

Corrigé. Par définition de la limite, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow -\varepsilon < \frac{f(x)}{x} - 2 < \varepsilon.$$

Appliquons ceci pour $\varepsilon = 1$. Il existe donc un $A_1 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \geq A_1$, on a $-1 < \frac{f(x)}{x} - 2 < 1$. En particulier, si $x \geq A_1$, on a $-1 < \frac{f(x)}{x} - 2$, soit $2 - 1 < \frac{f(x)}{x}$, c'est-à dire en multipliant par x si x est à la fois positif et supérieur à A_1, que $f(x) > x$.

D.5 Corrigé de l'examen partiel du 8 décembre 2011

Rappel important : Pour alléger les écritures, une expression du type $x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ est souvent *abrégée* en $o(x^n)$.

Exercice 1. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué entre parenthèses des expressions suivantes :

$$\log(1+x) - \log(1-x) \text{ à l'ordre } 4\,; \; \cos x \times \log(1-x) \text{ à l'ordre } 4\,;$$

$$\sqrt[3]{\cos x} \text{ à l'ordre } 3\,; \; \frac{\log(1-x)}{\cos x} \text{ à l'ordre } 3\,;$$

Corrigé. On a, à l'ordre 4 au voisinage de 0 et d'après le formunaire (pour $\log(1+x)$, on écrit celui de $\log(1-x)$ en remplaçant x par $-x$) :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

donc en faisant la différence

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

Deuxième DL, à l'ordre 4 : d'après le formulaire :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

donc par produit, et en ne gardant que les termes de degré jusqu'à 4 :

$$\begin{aligned}\cos x \times \log(1-x) &= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4})(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4})+o(x^4)\\ &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\ &= -x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^4).\end{aligned}$$

<u>Troisième DL, à l'ordre 3</u> :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\cos x} &= (\cos x)^{\frac{1}{3}}\\ &= (1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

Posons $t = -\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On a aussi d'après le formulaire :

$$(1+t)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{t}{3}-\frac{t^2}{9}+\alpha t^3+o(t^3)$$

pour un certain coefficient $\alpha = \frac{\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3}-1)\times(\frac{1}{3}-2)}{6}$ qu'il est inutile de calculer car il disparaitra dans la suite. Donc, en ne gardant que les termes de degré jusqu'à 3 :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\cos x} &= (1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))^{\frac{1}{3}}\\ &= 1+\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{3}-\frac{(-\frac{x^2}{2}+o(x^3))^2}{9}+\alpha(-\frac{x^2}{2}+o(x^3))^3+o(x^3)\\ &= 1-\frac{x^2}{6}+o(x^3).\end{aligned}$$

<u>Quatrième DL, à l'ordre 4</u> : On se ramène à un produit :

$$\frac{\log(1-x)}{\cos x} = \log(1-x)\times\frac{1}{\cos x}.$$

on a :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}.$$

Posons $t = \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On a aussi d'après le formulaire

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+t^4+o(t^4),$$

donc, en ne gardant que les termes de degré jusqu'à 4 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= 1+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))^2+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))^3+(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))^4+o(x^4)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Ainsi, en ne gradant que les termes jusqu'au degré 4 :

$$\begin{aligned}
\frac{\log(1-x)}{\cos x} &= \log(1-x) \times \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1}; \frac{x\sin 2x}{\cos(\log(1-x))-1}; \frac{e^x}{\cos x}; \frac{\sin x - x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1}.$$

Corrigé. La première limite est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, il suffit ici d'effectuer des DL à l'ordre 1 du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1} &= \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{e^x-1} \\
&= \frac{1+\frac{1}{2}x+o(x)-1}{1+x+o(x)-1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}x+x\varepsilon(x)}{x+x\varepsilon(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)} \\
&\to \frac{\frac{1}{2}+0}{1+0} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$.

Remarque importante. Il ne faut pas commettre l'erreur d'oublier, dans les égalités ci-dessus, les $o(x)$. En effet, une copie où il est écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-1}{e^x-1} &= \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{e^x-1} \\
&= \frac{1+\frac{1}{2}x-1}{1+x-1} \\
&= \text{etc } \cdots
\end{aligned}$$

perd une partie des points. La raison est **qu'il n'est pas vrai que $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x$. On a en réalité $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$.**

Deuxième limite. C'est encore une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, on effectue un DL des numérateur et dénominateur. Un DL d'ordre 1 s'avérerait infructueux, voire remarque à la fin de cet exercice. On effectue des DL d'ordre 2.

On a : $\sin t = t + o(t^2)$, donc $\sin(2x) = 2x + o(x)$ et $x \sin x = 2x^2 + o(x^2)$. D'autre part, $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc

$$\begin{aligned}
\cos(\log(1-x)) - 1 &= \cos(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 \\
&= 1 - \frac{(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2}{2} + o(x^2) - 1 \\
&= -\frac{x^2}{2} + o(x^2),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{x \sin 2x}{\cos(\log(1-x)) - 1} &= \frac{2x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
&= \frac{x^2(2 + o(1))}{x^2(-\frac{1}{2} + o(1))} \\
&= \frac{2 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \\
&\to \frac{2 + 0}{-\frac{1}{2} + o} \\
&= \frac{2}{-\frac{1}{2}} \\
&= -4
\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$.

Troisième limite. Cette fois-ci, il n'y a a pas de forme indéterminée : le numérateur tend vers 1, le dénominateur tend (aussi) vers 1, donc le quotient tend vers $\frac{1}{1} = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

Quatrième limite. C'est encore une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, on effectue un DL des numérateur et dénominateur. Des DL d'ordre 1, ainsi que des DL d'ordre 2, s'avéreraient infructueux, voire remarque à la fin de cet exercice. On effectue des DL d'ordre 3.

On a : $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+t} - 1 &= (1-t)^{\frac{1}{3}} - 1 \\
&= 1 + \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)(\frac{1}{3} - 2)}{6}t^3 + o(t^3) - 1 \\
&= \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + c.t^3 + o(t^3),
\end{aligned}$$

où c est une constante qu'il est inutile de préciser, puisqu'on va maintenant remplacer t par $-x^3$, et ne garder que les termes jusquà la puissance x^3 (pour cette même raison, le terme $\frac{1}{9}$ était aussi inutile à préciser) :

$$\sqrt[3]{1-x^3}-1 \quad = \quad -\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1} &= \frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} \\
&= \frac{x^3(-\frac{1}{6}+o(1))}{x^3(-\frac{1}{3}+o(1))} \\
&= \frac{-\frac{1}{6}+o(1)}{-\frac{1}{3}+o(1)} \\
&\to \frac{-\frac{1}{6}+0}{-\frac{1}{3}+0} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$.

Remarque : Au cours de ces 4 calculs de limites, il y a eû : une forme non-indéterminée, pour laquelle on n'a pas eu besoin de DL, et trois formes indéterminées, qu'on a levées en faisant des DL des numérateurs et dénominateurs, d'ordres 1 pour la deuxière limite, d'ordres 2 pour la troisième et d'ordres 3 pour la dernière.

À la question "mais à quel ordre doit-on faire les DL pour lever l'indétermination ?", il n'y a pas de réponse générale. Des DL d'ordre 1 suffisent parfois, l'ordre 2 est parfois nécessaire mais ne suffit pas toujours, ici il a fallu pousser à l'ordre 3 dans le dernier cas. Notons que des DL d'ordre 2 dans ce dernier cas auraient conduits à une autre forme indéterminée : le calcul montre que les DL d'ordre 2 sont $\sin x - x = o(x^2) = x^2\varepsilon_1(x)$ et $\sqrt[3]{1-x^3}-1 = o(x^2) = x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_i(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ pour $i = 1, 2$, d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - x}{\sqrt[3]{1-x^3}-1} &= \frac{x^2\varepsilon_1(x)}{x^2\varepsilon_2(x)} \\
&= \frac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)} \\
&\to \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$, qui est encore une forme indéterminée. On doit donc pousser (au moins) jusqu'à l'ordre 3.

Exactement de la même façon, un DL d'ordre 1 pour la seconde limite aurait été infructueux, conduisant à une forme indéterminée du type

$$\frac{x \sin 2x}{\cos(\log(1-x))-1} = \frac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)} \to \frac{0}{0}.$$

Pour conclure, face à une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ en $x \to 0$, on effectue des DL de "petit ordre" (pour que les calculs soient vite faits) du numérateur et du dénominateur. Si on tombe sur une autre forme indéterminée comme expliqué dans cette remarque,, on recommence les calculs avec un DL d'ordre plus grand.

On pourrait croire qu'il est plus sûr de commencer tout de suite par un DL d'ordre "grand", disons 3 ou 4. Il n'en est rien : on risque de perdre du temps à effectuer des calculs pour rien.

Exercice 3. On suppose que le DL de f en 0 d'ordre n est

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x),$$

avec $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$ polynôme de degré n et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Supposons de plus que $a_0 = a_1 = 0$ et que $n \geq 2$. Montrer que le $\mathrm{DL}_{n-2}(0)$ de $\frac{f(x)}{x^2}$ est

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x^2} &= \frac{P(x)}{x^2} + x^{n-2}\varepsilon(x) \\ &= a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \ldots + a_n x^{n-2} + x^{n-2}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Application : donner les $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$ et de $\frac{\log(\cos x)}{x^2}$.

Corrigé. Le calcul donne immédiatement, puisque $a_0 = a_1 = 0$, la relation

$$\frac{f(x)}{x^2} = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \ldots + a_n x^{n-2} + x^{n-2}\varepsilon(x).$$

Pour en déduire qu'il s'agit bien là du DL_{n-2} de $\frac{f(x)}{x^2}$, il reste à dire que $\varepsilon(x) \to 0$.

Pour calculer les $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$ et de $\frac{\log(\cos x)}{x^2}$, il s'agit donc de calculer les $DL_5(0)$ des numérateurs $\log(1+x) - x$ et $\log(\cos x)$. On trouve :

$$\log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5),$$

donc

$$\frac{\log(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{5} + o(x^3).$$

D'autre part, on trouve par composition à l'ordre 5, et en posant $t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ qui tend bien vers 0 quand $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \log(\cos x) &= \log(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)) \\ &= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + o(t^5) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) \text{ en ne gardant que les termes jusqu'à } x^5 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3).$$

D.6 Corrigé de l'examen Terminal du 10 janvier 2012

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x^2-9} \times e^x$.

Corrigé. f est définie en x si, et seulement si, $x^2 - 9 = (x-3)(x+3) \geq 0$, c'est-à dire si et seulement si $x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$. Donc $\boxed{D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[.}$

Continuité. $f(x)$ est le produit de e^x, qui est continue sur $\mathbb{R}$, et de $g(x) = \sqrt{x^2-9}$. Donc, par produit de fonctions continues, $f(x)$ sera continue en tout x où $g(x) = \sqrt{x^2-9}$ l'est. $g(x)$ est la composée de :
- $x \mapsto x^2 - 9$, continue sur $\mathbb{R}$;
- $t \mapsto \sqrt{t}$, continue en $t \geq 0$, en particulier en $t = x^2 - 9$ lorsque $x^2 - 9 \geq 0$, c'est-à dire lorsque $x \in D_f$.

Donc par composition, $g(x)$ est continue sur D_f, donc $\boxed{f(x) \text{ est continue sur } D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[.}$

Dérivabilité. $f(x)$ est le produit de e^x, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, et de $g(x) = \sqrt{x^2-9}$. Donc, par produit de fonctions dérivables, $f(x)$ sera dérivable en tout x où $g(x) = \sqrt{x^2-9}$ l'est. $g(x)$ est la composée de :
- $x \mapsto x^2 - 9$, dérivable sur $\mathbb{R}$;
- $t \mapsto \sqrt{t}$, dérivable en $t > 0$, en particulier en $t = x^2 - 9$ lorsque $x^2 - 9 > 0$, c'est-à dire lorsque $x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

Donc par composition, $g(x)$ est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$, donc
$\boxed{f(x) \text{ est dérivable sur }]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[.}$

Exercice 2. Montrer que l'équation $e^x = \sqrt{x+1}$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. On peut s'appercevoir (ce que le rédacteur du sujet n'avait pas vu...) que 0 est solution de l'équation, ce qui achève la résolution de l'exercice...

Exercice 3. Écrire les développements limités en $x = 0$ et à l'ordre indiqué entre parenthèses des expressions suivantes :

$$\cos x - \sqrt{1+x} \text{ à l'ordre } 2\,; \qquad \log(1-x) \times \sqrt[3]{1+x} \text{ à l'ordre } 2\,;$$
$$\frac{e^x}{\cos x} \text{ à l'ordre } 3\,; \qquad (\cos x)^{\sin x} \text{ à l'ordre } 3.$$

Corrigé. On a, à l'ordre 2 au voisinage de 0 et d'après le formunaire :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

donc en sommant $\boxed{\cos x - \sqrt{1+x} = -\frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$

<u>Deuxième DL, à l'ordre 2</u> : d'après le formulaire :

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

donc par produit, et en ne gardant que les termes de degré jusqu'à 2 :

$$\begin{aligned}\log(1-x) \times \sqrt[3]{1+x} &= \left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\log(1-x) \times \sqrt[3]{1+x} = -x - \frac{5}{6}x^2 + o(x^2).}$$

Troisième DL, à l'ordre 3. On commence par calculer le DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{\cos x}$, que l'on multipliera par celui de e^x. En cours de calcul, on posera $t = \frac{x^2}{2} - o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, qui tend bien vers 0 lorsque $x \to 0$, on utilisera le DL d'ordre 3

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3)$$

et on ne gardera que les termes d'ordre inférieurs ou égaux à 3 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

Puis on calcule le produit :

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{\cos x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).}$$

Quatrième DL, à l'ordre 3. : Par définition de la puissance, on a :

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp\left(\sin x \times (\log \cos x)\right).$$

Commençons par calculer le DL à l'ordre 3 de $\log \cos x$, puis celui du produit $\sin x \times \log \cos x$. En cours de calcul, on posera $t = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, on utilisera le DL d'ordre 3

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

et on ne gardera que les termes d'ordre inférieur à 3 :

$$\begin{aligned}
\log\cos x &= \log(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \\
&= (-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) - \frac{(-\frac{x^2}{2}+o(x^3))^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2}+o(x^3))^3}{3} + o(x^3) \\
&= -\frac{x^2}{2}+o(x^3)
\end{aligned}$$

On en déduit le produit :

$$\begin{aligned}
\sin x \times \log\cos x &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\times\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) \\
&= -\frac{x^3}{3}+o(x^3).
\end{aligned}$$

On peut maintanant calculer, en posant $t=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ qui tend bien vers 0 lorsque $x\to 0$ et en utilisant le DL d'ordre 3

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$$

:

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{\sin x} &= \exp(\sin x\log\cos x) \\
&= \exp\left(-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) \\
&= 1+\left(-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\frac{\left(-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3}{6}+o(x^3)
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{(\cos x)^{\sin x} = 1-\frac{x^3}{3}+o(x^3).}$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes en 0 :

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1};\quad \frac{e^{\sin x}-1}{\log(1-x)};\quad \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{1+x}};\quad \frac{\sin^2 x}{1-\cos x};\quad \frac{x^{\sin x}-1}{x\log x}.$$

Corrigé.

Première limite. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} &= \frac{1+\frac{x}{3}+o(x)-1}{1+\frac{x}{2}+o(x)-1} \\
&= \frac{x(\frac{1}{3}+o(1))}{x(\frac{1}{2}+o(1))} \\
&= \frac{\frac{1}{3}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\to \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{2}{3}.}$$

Remarque. Si on veut utiliser les équivalents, c'est presque pareil. Le DL à l'ordre 1 du numérateur (qu'il faut écrire sur la copie) montre que

$$\sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{x}{3};$$

celui du dénominateur (qu'il faut aussi écrire sur la copie) montre que

$$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}.$$

Donc par quotient

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1} \sim \frac{\frac{x}{3}}{\frac{x}{2}} \sim \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$$

et donc la limite est bien $\frac{2}{3}$.

Deuxième limite, avec le language des équivalents. Il s'agit encore d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On a

$$e^{\sin x} - 1 = \exp(x + o(x)) - 1 = 1 + (x + o(x)) - 1 = x + o(x) \sim x$$

et

$$\log(1-x) \sim -x,$$

donc

$$\frac{e^{\sin x}-1}{\log(1-x)} \sim \frac{x}{-x} \sim -1$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\log(1-x)} = -1.}$$

Remarque. Si on ne veut pas parler d'équivalents, on écrit les DL à l'ordre 1des numérateurs et dénominateurs :

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sin x}-1}{\log(1-x)} &= \frac{\exp(x+o(x))-1}{-x+o(x)} \\ &= \frac{x+o(x)}{-x+o(x)} \\ &= \frac{1+o(1)}{-1+o(1)} \\ &\to \frac{1}{-1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Troisième limite. Il **ne s'agit pas d'une forme indéterminée :** par continuité de exp en $\cos 0 = 1$, le numérateur tend vers $e^{\cos 0} = e^1 = e$, alors que le dénominateur tend vers $\sqrt{1+0} = 1$, donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{e}{1} = e.}$$

Quatrième limite. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. On a : $\sin x \sim x$ donc $\sin^2 x \sim x^2$, et $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ donc

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \sim \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} \sim 2$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 2.}$$

Remarque. Si on ne veut pas parler d'équivalents, on écrit les DL à l'ordre 2 des numérateurs et dénominateurs :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} &= ... \\
&= \frac{x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
&= \frac{x^2(1+o(1))}{x^2(\frac{1}{2}+o(1))} \\
&= \frac{1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} \\
&\to \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\log(1-x)\times\sqrt[3]{1+x} = -x-\frac{5}{6}x^2+o(x^2).}$$

$$lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\log(1-x)} = 2.$$

Cinquième limite. Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Cette question est un peu plus délicate que les précédentes, car les numérateurs et dénominateurs n'ont pas de DL en O à cause du facteur $\log x$. On calcule des développements asymptotiques en 0. On a, puisque $x\log x$ tend vers 0 lorsque $x\to 0$, et en posant en cours de calcul $t = x\log x + o(x\log x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{\sin x}-1}{x\log x} &= \frac{\exp(\sin x\log x)-1}{x\log x} \\
&= \frac{\exp((x+o(x))\log x)-1}{x\log x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp\left(x\log x + o(x\log x)\right) - 1}{x\log x} \\
&= \frac{(1 + x\log x + o(x\log x)) - 1}{x\log x} \\
&= \frac{x\log x + o(x\log x)}{x\log x} \\
&= 1 + o(1) \\
&\sim 1
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{lim_{x\to 0}\frac{x^{\sin x} - 1}{x\log x} = 1.}$$

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes en $+\infty$:

$$\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\log x}; \quad \frac{\sqrt{1+\sin x}}{x}; \quad \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Corrigé. Première limite. Le numérateur est déjà une forme indéterminée $\infty - \infty$. On a

$$\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\log x} = \frac{x}{\log x} \times (x - \frac{1}{\sqrt{x}})$$

pour tout $x > 0$. le premier facteur $\frac{x}{\log x}$ tend vers $+\infty$, le second facteur $x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty - 0 = +\infty$, donc le produit tend vers $+\infty \times +\infty = +\infty$. Donc

$$\boxed{lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\log x} = +\infty.}$$

Deuxième limite. Le numérateur n'a pas de limite en $+\infty$, et le dénominateur tend vers $+\infty$. On va montrer que le numérateur étant borné, la fonction tend vers 0 par le théorème des gendarmes.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$-1 \le \sin x \le 1,$$

donc

$$0 \le 1 + \sin x \le 2,$$

ou encore

$$0 \le \sqrt{1+\sin x} \le \sqrt{2}.$$

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$0 \le \frac{\sqrt{1+\sin x}}{x} \le \frac{\sqrt{2}}{x},$$

où le terme de droite tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. Donc par le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sin x}}{x} = 0.}$$

Troisième limite. Il s'agit d'une forme indéterminée (que l'on peut nommer $1^{+\infty}$), dérivée de la forme indéterminée $0 \times \infty$. En effet,

$$1^{+\infty} = \exp(+\infty \times \log 1) = \exp(+\infty \times 0).$$

On a, en posant en cours de calcul $t = \frac{1}{x}$ qui tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{2}{x}\right)^x &= \exp\left(x\log\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)\\
&= \exp\left(x \times \left(\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\
&= \exp(2+o(1))
\end{aligned}$$

La quantité à l'intérieur de l'exponentielle tend donc vers 2, donc par continuité de l'exponentielle en 2, on a :

$$\boxed{lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2.}$$

Remarque. La même méthode montre plus généralement que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Exercice 6. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ pour

$$f(x) = (1+\sin x)^{\sqrt{1+x}}.$$

Corrigé. Pour montrer la puissance de la méthode, on va même calculer ici $f^{(3)}(0)$. Bien sûr, pour l'examen, il suffisait de calculer les DL d'ordre 2 et les calculs ci-dessous s'en trouvaient assez simplifiés (pas de termes en x^3, on s'arrête à $o(x^2)$). On va donc calculer le DL de f(x) à l'ordre 3 au voisinage de 0 de deux façons différentes : d'abord par le calcul, puis par la formule de Taylor-Young. On en déduira par unicité du DL d'ordre trois que ceux-ci sont égaux, ce qui donnera les dérivées cherchées avec ÉNORMÉMENT MOINS de calculs que si on les faisait "à la main".

Premier calcul. En posant en cours de calcul $t = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ qui tend vers 0 lorsque $x \to 0$, puis $u = x - \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)$ qui tend lui aussi vers 0 lorsque $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
(1+\sin x)^{\sqrt{1+x}} &= \exp\left(\sqrt{1+x} \times \log(1+\sin x)\right)\\
&= \exp\left(\sqrt{1+x} \times \log(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\right)\\
&= \exp\left(\sqrt{1+x} \times \left(\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) - \frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{2} + \frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{3} + o(x^3)\right)\right)\\
&= \exp\left(\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right) \times \left(x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right)\times\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\right)\\
&= \exp\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)\\
&= \exp\left(x-\frac{5}{24}x^3+o(x^3)\right)\\
&= 1+\left(x-\frac{5}{24}x^3+o(x^3)\right)+\frac{\left(x-\frac{5}{24}x^3+o(x^3)\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{5}{24}x^3+o(x^3)\right)^3}{6}+o(x^3)\\
&= 1+x-\frac{5}{24}x^3+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{24}+o(x^3)
\end{aligned}
$$

Second calcul. On a :

- $\sqrt{1+x}$ de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]-1,+\infty[$;
- $1+\sin x$ de classe $\mathcal{C}^4$ et strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$, $\log t$ de classe $\mathcal{C}^4$ sur $t\in]0,+\infty[$, donc $\log(1+\sin x)$ de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$;

donc par produit $\sqrt{1+x}\times\log(1+\sin x)$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]-1,+\infty[\cap]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[=]-1,+\frac{\pi}{2}[$, c'est-à dire sur un voisinage de 0, et finalement puisque exp est $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$, on a finalement que

$$f(x)=\exp\left(\sqrt{1+x}\times\log(1+\sin x)\right)$$

est $\mathcal{C}^4$ sur ce voisinage de 0 (ouf!), donc par Taylor-Young on a

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}+o(x^3).$$

Conclusion. Par unicité du DL d'ordre 3 en 0 de f, on a donc en comparant les deux DL :

$$f(0)=1; f'(0)=1; \frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2}; \frac{f^{(3)}(0)}{6}=-\frac{1}{24},$$

c'est-à dire finalement

$$\boxed{f(0)=f'(0)=f''(0)=1 \text{ et } f^{(3)}(0)=-\frac{1}{4}.}$$

Exercice 7. Montrer que $(\cos x)^{\sin x}\sim e^{-\frac{x^3}{2}}$ au voisinage de 0.

Corrigé. On a, en posant $t=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ qui tend bien vers 0 lorsque $x\to 0$:

$$
\begin{aligned}
(\cos x)^{\sin x} &= \exp\left(\sin x\times\log(\cos x)\right)\\
&= \exp\left(\sin x\times\log(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\right)\\
&= \exp\left((x+o(x))\times(-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(-\frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^3}{2}\right) \times \exp\big(o(x^3)\big) \end{aligned}$$

Mais $o(x^3) \to 0$ lorsque $x \to 0$, donc par continuité de l'exponentielle en 0, on a $\exp\big(o(x^3)\big) \to e^0 = 1$ lorsque $x \to 0$, ce qui signifie bien que

$$\boxed{(\cos x)^{\sin x} \sim \exp\left(-\frac{x^3}{2}\right).}$$

Exercice 8. Montrer que les premiers termes des développements asymptotiques en $+\infty$ des fonctions suivantes sont

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Corrigé. Dans les deux cas, en posant $t = \frac{1}{x}$ qui tend bien vers 0 lorsque $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1} &= \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t} - 1} \\ &= \frac{1}{t} \times \frac{1}{1-t} \\ &= x(1 + t + t^2 + o(t^2)) \\ &= x(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)) \\ &= x + 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= x \sin t \\ &= x(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)) \\ &= x(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)) \\ &= 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$