Corrigé (des exercices 1-8) du TD n° 9 — Formules de Taylor

Corrigé de l'exercice 1 1. (a) Formule de Taylor-Young : supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

(b) Formule de Taylor-Lagrange : supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que l'on ait

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

(notons ici que θ dépend de h).

2. La partie principale de la série de Taylor de f en x_0 à l'ordre n est le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

(par convention, $0! = 1! = 1$).

3. Un développement limité de f en x_0 à l'ordre n est la donnée d'un polynôme P de degré n tel que l'on ait, pour tout h tel que $x_0 + h$ appartienne à I,

$$f(x_0+h) = P(h) + h^n\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Corrigé de l'exercice 2 1. La fonction $f : x \mapsto e^x$ est sa propre dérivée, et vaut 1 en 0. Ainsi les coefficients $f^{(k)}(0)$ sont tous égaux à 1 ; la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 4 s'écrit donc :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$$

2. Commençons par calculer les 4 premières dérivées de la fonction $f : x \mapsto \ln x$.

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f^{(3)}(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}.$$

Les valeurs respectives de ces fonctions en 1 sont 0, 1, -1, 2 et -6. La formule de Taylor-Young en 1 à l'ordre 4 s'écrit donc :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + h^4\varepsilon(x)$$

Il vient alors

$$\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{1}{2} + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{4} + h^2\varepsilon(x),$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} = \frac{1}{2}.$$

3. La formule de Taylor-Young en 2 à l'ordre 4 pour la fonction polynomiale $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ s'écrit :
$$P(2+h) = P(2) + hP'(2) + \frac{h^2}{2}P''(2) + \frac{h^3}{3!}P^{(3)}(2).$$
En effet, comme P est de degré 3 toutes ses dérivées à partir de $P^{(4)}$ sont nulles ! D'autre part, en regardant bien la formule ci-dessus, on réalise qu'il n'y a pas besoin de calculer les coefficients $P'(2)$, $P''(2)$ et $P^{(3)}(2)$. En effet, il suffit de calculer $P(2+h)$ pour expliciter la formule :
$$\begin{aligned} P(2+h) &= 1 + (2+h) + (2+h)^2 + (2+h)^3 \\ &= 1 + 2 + h + (h^2 + 4h + 4) + (h^3 + 6h^2 + 12h + 8) \\ &= 15 + 17h + 7h^2 + h^3 \end{aligned}$$
Ce calcul permet au passage d'affirmer que : $P(2) = 15$, $P'(2) = 17$, $P''(2) = 14$ et $P^{(3)}(2) = 6$.
4. Commençons par calculer les 4 premières dérivées de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -x(1-x^2)^{-1/2} \\ f''(x) &= -(1-x^2)^{-1/2} - x((1-x^2)^{-1/2})' = -(1-x^2)^{-1/2} - x(-\frac{1}{2})(-2x)(1-x^2)^{-3/2} \\ &= -(1-x^2)^{-3/2}((1-x^2) + x^2) = -(1-x^2)^{-3/2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{2}(-2x)(1-x^2)^{-5/2} = -3x(1-x^2)^{-5/2} \\ f^{(4)}(x) &= -3(1-x^2)^{-5/2} - 3x((1-x^2)^{-5/2})' \end{aligned}$$
d'où
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = -3.$$
La formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 4 s'écrit donc :
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x).$$
Remarque : ce calcul des dérivées successives de la fonction f est extrêmement fastidieux. Nous verrons plus loin qu'en composant des polynômes de Taylor de fonctions usuelles (que vous êtes censés apprendre par coeur) on obtient la même formule de façon beaucoup plus efficace... Cela fournit du même coup un procédé pour calculer $f'(0), \ldots, f^{(4)}(0)$ sans avoir à calculer $f'(x), \ldots, f^{(4)}(x)$.

Corrigé de l'exercice 3 En appliquant Taylor-Lagrange pour $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0 on trouve que, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}e^{\theta x}.$$
On applique cette formule à $x = \frac{1}{2}$, ce qui donne :
$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \times 4} + \frac{1}{3! \times 8} + \frac{1}{4! \times 16} + \frac{1}{5! \times 32} + \frac{1}{6! \times 64}e^{\theta/2}. \tag{1}$$
D'autre part, nous avons
$$e^{\theta/2} < \sqrt{e} < 2$$
d'où
$$\frac{1}{6! \times 64}e^{\theta/2} < \frac{1}{6! \times 32} < 10^{-4}.$$
Ceci montre que la somme des 6 premiers termes dans la formule (1) ci-dessus constitue une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

Corrigé de l'exercice 4

1. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 en 0 pour la fonction sinus s'écrit
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}\sin\theta x$$
pour un certain $\theta \in]0,1[$ dépendant de x.
2. En vertu de ce qui précède, nous avons
$$\frac{\sin x - x}{x^2} = -\frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!} - \frac{x^4}{6!}\sin\theta x$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = 0.$$
3. Soit $x \geq 0$. Il est facile de voir que
$$x < 6 \Rightarrow \frac{x}{6} < 1 \Rightarrow \frac{x}{6!} < \frac{1}{5!} \Rightarrow \frac{x^6}{6!} \leq \frac{x^5}{5!}$$
Il en résulte que, quand $x \in [0,6[$, alors
$$\left|\frac{x^6}{6!}\sin\theta x\right| \leq \frac{x^5}{5!}$$
d'où
$$\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}\sin\theta x \geq 0.$$
D'après la formule de la question 1, nous avons donc, pour $x \in [0,6[$,
$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$
D'autre part, on vérifie facilement que, pour $x \geq 6$,
$$x - \frac{x^3}{6} \leq -1.$$
On a donc montré, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$
L'autre inégalité se montre par un procédé analogue, en faisant cette fois appel à la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 7.

Corrigé de l'exercice 5 Le principe est le même que pour la question 3 de l'exercice précédent.

Corrigé de l'exercice 6

1. La formule de Taylor-Young pour sinus à l'ordre 6 en 0 nous dit que
$$\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + h^6\varepsilon(h)$$
d'où, en remplaçant h par x^2,
$$\begin{aligned}\sin(x^2) &= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + x^{12}\varepsilon(x^2)\\ &= x^2 - \frac{x^6}{3!} + x^9\left(\frac{x}{5!} + x^3\varepsilon(x^2)\right).\end{aligned}$$
Si on appelle à nouveau, par abus de notation, $\varepsilon(x)$ la fonction entre parenthèses, nous obtenons
$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + x^9\varepsilon(x)$$

ce qui constitue en fait un développement limité de $\sin(x^2)$ à l'ordre 9 en 0. D'autre part

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon(x).$$

Or on peut additionner les développements limités. D'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2) + \cos x \\ &= 1 + x^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{x^4}{4!} - x^6\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{6!}\right) + x^6\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{121}{720}x^6 + x^6\varepsilon(x). \end{aligned}$$

ce qu'on cherchait.

2. Par définition de la fonction puissance, il vient

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}.$$

Pour trouver le DL de $g(x)$ à l'ordre 2 en 0, on doit d'abord trouver le DL à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{x}\ln(1+x)$. Or le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ s'écrit :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

en divisant le tout par x, on trouve

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x).$$

ce qui constitue un DL d'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{x}\ln(1+x)$. Notons que cette opération a fonctionné parce que le terme constant du DL de $\ln(1+x)$ est nul. On doit maintenant composer ce DL avec le DL d'ordre 2 en 1 de la fonction exponentielle : en effet, le calcul que nous venons de faire prouve que, quand x est au voisinage de 0, alors $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ est au voisinage de 1. Il vient :

$$e^{1+h} = e \times e^h = e \times \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + h^2\varepsilon(h)$$

D'où, par composition des DL d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} g(x) &= e \times \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2\right) + x^2\varepsilon(x) \\ &= e \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9}\right)\right) + x^2\varepsilon(x) \\ &= e \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2\right) + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Si l'on prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = e$, alors la formule ci-dessus montre que g est dérivable en 0, et que

$$g'(0) = -\frac{e}{2}.$$

3. Le DL de sinus à l'ordre 4 en 0 s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$$

(notez bien que le terme de degré 4 est nul, comme tous les termes de degré pair d'ailleurs, ce qui provient du fait que sinus est une fonction impaire). Quand x est au voisinage de 0, $\sin x$ est lui aussi au voisinage de 0, donc on doit également considérer le DL de e^x à l'ordre 4 en 0, à savoir :

$$\begin{aligned} e^h &= 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + h^4\varepsilon(h) \\ &= 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + h^4\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de composer les deux DL :

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + x^4\varepsilon(x) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \frac{1}{6}(x^3 + \cdots) + \frac{1}{24}(x^4 + \cdots) + x^4\varepsilon(x) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

(sur la deuxième ligne du calcul, les $\cdots$ remplacent des termes de degré au moins 5, qu'il n'est pas nécessaire de calculer explicitement puisqu'ils vont rejoindre le reste $x^4\varepsilon(x)$).

4. On calcule assez facilement les DL suivants à l'ordre 8 en 0 :

$$(\cos x - 1)(\sinh x - x) = -\frac{x^5}{12} + \frac{x^7}{360} + x^8\varepsilon(x)$$

et

$$(\cosh x - 1)(\sin x - x) = -\frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{360} + x^8\varepsilon(x)$$

d'où

$$i(x) = \frac{x^7}{180} + x^8\varepsilon(x).$$

Par identification avec la formule de Yaylor-Young, on en déduit que

$$\frac{i^{(7)}(0)}{7!} = \frac{1}{180}$$

d'où

$$i^{(7)}(0) = 28.$$

5. Nous avons

$$j(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}(x^2+1)\left(\frac{1}{1+(x+\frac{x^2}{2})}\right).$$

L'intérêt de cette nouvelle écriture de $j(x)$ est de faire apparaître la fonction $\frac{1}{1+X}$ dont on connaît le DL en 0 à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^3\varepsilon(X).$$

Quand x est au voisinage de 0, $(x + \frac{x^2}{2})$ est aussi au voisinage de 0. Donc il suffit de remplacer X par $(x + \frac{x^2}{2})$ afin d'obtenir le DL de $\frac{1}{1+(x+\frac{x^2}{2})}$ à l'ordre 3 en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+(x+\frac{x^2}{2})} &= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + x^3\varepsilon(x) \\
&= \cdots \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Pour obtenir le DL de $j(x)$ en 0 on multiplie ceci avec $\frac{1}{2}(x^2+1)$ qui est son propre DL d'ordre 3 en 0. Il vient :

$$j(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

6. Le DL d'ordre 4 au voisinage de 1 pour le logarithme s'écrit

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + h^4\varepsilon(h).$$

Le DL d'ordre 4 au voisinage de 1 pour $x \mapsto 1/x$ s'écrit

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + h^4\varepsilon(h).$$

On obtient le DL de $x \mapsto 1/x$ en élevant celui-ci au carré :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+h)^2} &= (1-h+h^2-h^3+h^4)^2 + h^4\varepsilon(h) \\ &= 1-2h+3h^2-4h^3+5h^4+h^4\varepsilon(h).\end{aligned}$$

En multipliant le tout, on obtient le DL d'ordre 4 au voisinage de 1 pour $k(x)$:

$$\begin{aligned}k(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)^2} &= (1-h+h^2-h^3+h^4)(1-2h+3h^2-4h^3+5h^4) + h^4\varepsilon(h) \\ &= \cdots \\ &= h - \frac{5}{2}h^2 + \frac{13}{3}h^3 - \frac{77}{12}h^4 + h^4\varepsilon(h).\end{aligned}$$

Au point de coordonnées $(1, k(1)) = (1, 0)$, la tangente à la courbe représentative de la fonction k est de pente 1. L'équation de cette tangente est donc

$$y = x - 1.$$

Pour déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente, il faut se placer au voisinage du point, c'est-à-dire faire tendre h vers 0. Alors h^3 est négligeable par rapport à h^2, donc c'est le signe du terme en h^2 qui donne la position. Plus précisément, $h(1+h) - h$ représente la différence entre la courbe et sa tangente. D'après ce qui précède, on peut écrire

$$h(1+h) - h = -\frac{5}{2}h^2 + \cdots$$

où les $\cdots$ sont des termes négligeables quand h tend vers 0. Comme cette différence est du signe de $-h$, on en déduit que la courbe est en-dessous de sa tangente en ce point.

7. On souhaite calculer le DL de la fonction

$$l(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

au voisinage de 0. Notons ici que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'admet pas de DL en 0 (elle n'est même pas prolongeable par continuité en ce point !). Par contre, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ admet une limite finie en 0, donc il se peut qu'elle admette un DL en ce point. Plus exactement, le DL à l'ordre 5 en 0 de sinus se factorise par x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x).$$

En divisant cela par x, on trouve donc un DL à l'ordre 4 en 0 :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + x^4\varepsilon(x).$$

Pour obtenir le DL de $l(x)$, on calcule le carré :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 &= \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right)^2 + x^4\varepsilon(x). \\ &= \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 + x^4\varepsilon(x).\end{aligned}$$

8. Après calcul (non détaillé) on trouve le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour $r(x)$, à savoir :

$$r(x) = (1-2x^2)e^x = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{23}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

9. Après calcul (non détaillé) on trouve le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour $s(x)$, à savoir :

$$s(x) = \sqrt{1+x+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Corrigé de l'exercice 7 L'entier n étant fixé, on peut appliquer Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 pour l'exponentielle : pour tout réel x, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

Si x est strictement positif, alors $e^{\theta x}$ est strictement supérieur à 1. Par conséquent

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2x^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!}e^{\theta x} \geq \frac{x}{(n+1)!}.$$

Quand on fait tendre x vers $+\infty$, la quantité de droite tend vers $+\infty$, d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Le résultat voulu en découle aussitôt.

Corrigé de l'exercice 8 Le DL à l'ordre 2 en 0 pour $x \mapsto \ln(1+x)$ s'écrit

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = x\left(1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)\right).$$

On peut donc écrire

$$\sqrt{\ln(1+x)} = \sqrt{x}\sqrt{1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)}.$$

Attention : l'expression ci-dessus n'est pas un développement limité, c'est juste une égalité entre deux fonctions. On peut ensuite se servir du DL de $t \mapsto \sqrt{1+t}$ en 0 pour simplifier la deuxième racine :

$$\sqrt{1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)} = 1 - \frac{x}{4} + x\varepsilon(x).$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\ln(1+x)} &= \sqrt{x} - \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{4} + x\varepsilon(x)\right) \\ &= \frac{x^{3/2}}{4} + x^{3/2}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x}}{4} + \sqrt{x}\varepsilon(x)\right) = 0.$$

Autrement dit, f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.