

TD n° 9 — Formules de Taylor

Exercice 1

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur I , et x_0 un point de I .

1. Rappeler l'énoncé des formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange pour la fonction f au point x_0 à l'ordre n , en indiquant soigneusement les hypothèses.
2. Qu'est-ce que la partie principale de la série de Taylor de f en x_0 à l'ordre n ?
3. Qu'appelle-t-on un développement limité de f en x_0 à l'ordre n ?

Exercice 2

Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
2. $x \mapsto \ln x$ au voisinage de 1. En déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$.
3. $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ au voisinage de 2.
4. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de 0.

Exercice 3

Appliquer Taylor-Lagrange pour calculer la valeur approchée de \sqrt{e} à 10^{-4} près.

Exercice 4

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 en 0 pour la fonction $x \mapsto \sin x$.
2. Quelle est la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} ?$$

3. Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Que se passe-t-il lorsque x est négatif ?

Exercice 5

Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Que se passe-t-il lorsque x est négatif ?

Exercice 6

Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x^2) + \cos x$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.
2. $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. On prolonge g à \mathbb{R} tout entier en posant $g(0) = e$. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.
3. $h(x) = e^{\sin x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
4. $i(x) = (\cos x - 1)(\sinh x - x) - (\cosh x - 1)(\sin x - x)$ à l'ordre 7 au voisinage de 0. En déduire la valeur $i^{(7)}(0)$.
5. $j(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
6. $k(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 1. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative au point $(1, 0)$ et déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente.
7. $l(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

8. $r(x) = (1 - 2x^2)e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

9. $s(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 7

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. En utilisant une formule de Taylor, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Exercice 8

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{\ln(1+x)}$$

est dérivable à droite en 0, et donner la valeur de sa dérivée.

Exercice 9

Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, avec $n = 4$.

2. $f(x) = (\sin(x^3))^{\frac{1}{3}}$, $n = 13$.

3. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, avec $n = 2$.

4. $f(x) = \ln(1 + x \sin(x))$, et $n = 4$.

5. $f(x) = e^{\cos(x)}$, $n = 4$.

6. $f(x) = (1 + \cos(x))^{1/3}$, $n = 4$.

7. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $n = 4$.

Exercice 10

Calculer le développement limité en $\pi/4$ à l'ordre 4 de $\sqrt{\tan(x)}$.

Exercice 11

1. Trouver un équivalent polynômial au voisinage de $x = 1$ de la fonction

$$f(x) = 2^{x-1} - x^{\ln 2}.$$

2. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\ln(1+x)} + \frac{a}{x} + b \right) = 0,$$

et donner un équivalent de l'expression trouvée quand $x \rightarrow 0$.

3. Donner le développement asymptotique à deux termes de la suite

$$u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n$.

Exercice 12

Calculer les limites des fonctions suivantes quand $x \rightarrow 0$:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x) \right)$$

$$f_2(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sinh^2(x)}$$

$$f_4(x) = \left(\frac{e^{ax} + e^{bx}}{2} \right)^{1/x} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13

Rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$

2) $g(x) = ((x^2 - 2)(x + 3))^{1/3}$