TD n° 8 — Rolle, accroissements finis

Exercice 1

1. Donner une version explicite du théorème de Rolle sur les intervalles $[1, 2]$ puis $[2, 3]$ pour la fonction $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
2. On pose $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Montrer que f' ne s'annule pas sur $[-1, 1]$; pourquoi cela ne prend-il pas le théorème de Rolle en défaut ?
3. Donner une version explicite du théorème des accroissements finis pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1, 2]$.

Exercice 2

1. En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, encadrer la différence $\sqrt{100.1} - 10$.
2. En étudiant la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$, encadrer la différence $1 - \exp(-0.1024)$.

Exercice 3

Appliquer le théorème des accroissements finis ou l'une de ses variantes pour démontrer les inégalités suivantes :

(1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour x et y réels quelconques ;

(2) $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$;

(3) $e^x \geq 1 + x$ pour tout x réel ;

(4) $x/(1 + x^2) \leq \arctan x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 4

Soient a et b deux réels, et $n \geq 2$ un entier naturel. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 5

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On pose

$$P_n(X) = \left((1 - X^2)^n\right)^{(n)} \qquad \text{(dérivée } n\text{-ième).}$$

1. Quel est le degré de P_n ?
2. Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que P_n a n racines réelles distinctes, qui appartiennent toutes à $]-1, 1[$.

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b[$, telle que $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.

1. Montrer que f' n'est pas bornée sur $[a, b[$.
2. Peut-on dire que $\lim_{x \to b} f'(x) = +\infty$? (Indication : étudier la fonction $f(x) = -\frac{1}{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur l'intervalle $[-1, 0[$).