TD n° 6 — Dérivabilité

Exercice 1
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour chaque expression ci-dessous, décrire son domaine de dérivabilité, puis exprimer sa dérivée en fonction de f et de f'.

$$f(\sin x) \qquad \sin(f(x)) \qquad f(\sin^2 x) \qquad \sqrt{f(x)} \qquad f(\sqrt{x})$$
$$\ln(f(x)) \qquad f(\ln x) \qquad e^{f(x)} \qquad f(e^x) \qquad \frac{1}{1+f(x)^2}.$$

Exercice 2
Déterminer le domaine de dérivabilité, puis calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2\sin^2 x} \qquad f_2(x) = \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1} \qquad f_3(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$$
$$f_4(x) = (x(x-2))^{1/3} \qquad f_5(x) = \ln|\tan(x/2)| \qquad f_6(x) = \ln(\tan(1+\sqrt{\sin(x^2)}))$$
$$f_7(x) = \frac{1}{x^{2/3}} - \frac{1}{x^{3/2}} \qquad f_8(x) = (\cos x)^x.$$

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable en 0.
3. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 4
Prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité en ce même point, des fonctions

$$g_1 : x \mapsto x^2\cos(1/x) \qquad \text{et} \qquad g_2 : x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$$

Exercice 5
En dérivant n fois la fonction $x \mapsto e^{3x}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

Exercice 6 (Règle de l'Hospital)
1. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$ tel que $g'(x_0) \neq 0$. Montrer que :
$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$
2. Calculer les limites suivantes :
$$a)\ \lim_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} \qquad b)\ \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{e^x-1}{\sin x - 1}$$