TD n° 5 — Fonctions circulaires et hyperboliques

Fonctions circulaires et leurs réciproques

Exercice 1
Calculer les quantités suivantes :

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \arcsin\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \arccos\frac{1}{2} \qquad \arccos\frac{-1}{2} \qquad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) \qquad \arccos\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right) \qquad \sin(\arcsin 1) \qquad \arcsin(\sin 1) \qquad \tan(\arctan 3) \qquad \arctan(\tan 3)$$

Exercice 2
Simplifier, si possible, les expressions suivantes :

$$a)\ \sin(\arccos x) \qquad b)\ \cos(\arcsin x) \qquad c)\ \tan(\arcsin x).$$

Exercice 3
Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Fonctions hyperboliques

Exercice 4

1. Que représente la courbe d'équation
$$x^2 - y^2 = 1$$
dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$?
2. Donner une interprétation géométrique de l'identité
$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$
3. En quoi les fonctions sinh et cosh sont-elles des analogues hyperboliques des fonctions sin et cos classiques ?

Exercice 5
Simplifier l'expression suivante :

$$\frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{x}.$$

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\cosh x + 3\sinh x = 1.$$

Exercice 7
Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(\cosh x) - x.$$

Exercice 8

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$
2. Montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$