TD n° 3 — Limites et continuité

Exercice 1
Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin 2x}{x^2} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x\sqrt{x+1}}{x^2},$$
$$c)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+\sqrt{x}}{x} \qquad d)\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$
$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x} \qquad f)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$$

Exercice 2
Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$$
$$c)\ \lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\ln x)}{x}$$

Exercice 3
Chercher des exemples de fonctions f et g, qui tendent toutes les deux vers 0 en 0, et telles que :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, où ℓ est un réel non nul.
5. $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure du graphe de f.
2. La fonction f est-elle continue ? Justifier.

Exercice 5
Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x) = x\lfloor x \rfloor$
2. $g(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$

Exercice 6

1. La fonction $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin x$$
est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. La fonction $\psi : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$
est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $f(x) - x$ soit bornée sur $[x_0, +\infty[$. Déterminer la limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Exercice 8

Les limites ci-dessous existent-elles ? Si oui, déterminer leur valeur.
$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

Exercice 9

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, les démontrer. Sinon, donner un contre-exemple.

1. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante et $f(0) = 1$, alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
2. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante, $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
3. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est décroissante, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
4. Si on a $f(x) < g(x) < h(x)$ pour tout x, et si ces trois fonctions tendent respectivement vers ℓ, ℓ' et ℓ'' (en x_0 ou en l'infini), alors on a
$$\ell < \ell' < \ell''.$$
5. Si on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x, et si f et h tendent respectivement vers ℓ et ℓ'' (en x_0 ou en l'infini), alors g tend vers une limite ℓ' vérifiant
$$\ell \leq \ell' \leq \ell''.$$

Exercice 10

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$. On suppose que f admet une limite finie en x_0. Montrer que f est bornée dans un voisinage de x_0.

(Rappel de vocabulaire : un *voisinage* de x_0 est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant x_0. L'exemple le plus standard est un intervalle ouvert centré en x_0.)

Exercice 11

On considère la fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que χ est discontinue en tout point x_0 irrationnel. (Indication : on a montré dans la feuille n° 1 que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres rationnels.)
2. La fonction χ est-elle également discontinue en tout point rationnel ?