TD n° 2 — Fonctions usuelles

Exercice 1
Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(x^2 - 4) \qquad f_2(x) = \frac{\sin 2x}{2 - \cos x} \qquad f_3(x) = e^{\sqrt{x(x-1)}}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{e^{\sin x} - 1} \qquad f_5(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{1 - \ln x} \qquad f_6(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{\ln(x+2)} \qquad f_8(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln(x-1)(x+1)}} \qquad f_9(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\phi(x) = \ln\left(\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right) \qquad \psi(x) = \ln|\tan(x/2)| \qquad \tau(x) = (\cos x)^x$$

Exercice 2
1. Qu'est-ce qu'une fonction paire ? Qu'une fonction impaire ? Comment ces propriétés se traduisent-elles graphiquement ?
2. Tracer l'allure du graphe des fonctions suivantes :

$$g_1(x) = x \qquad g_2(x) = x^2 \qquad g_3(x) = x^3 \qquad g_4(x) = x^4$$

$$h_1(x) = \frac{1}{x} \qquad h_2(x) = \frac{1}{x^2} \qquad h_3(x) = \frac{1}{x^3} \qquad h_4(x) = \frac{1}{x^4}$$

$$k_1(x) = \sqrt{x} \qquad k_2(x) = x^{3/2} \qquad k_3(x) = x^{2/3} \qquad k_4(x) = x^{-2/3}$$

3. Que se passe-t-il si l'on remplace x par $x + 1$ dans les formules ci dessus ? Et si l'on remplace x par $x - 1$?

Exercice 3
1. Soient $x \in [1, 3]$ et $y \in [5, 7]$. Donner des encadrements pour chacune des quantités ci-dessous.

$$x - y \qquad \frac{x}{y} \qquad \frac{y - x}{y + x}$$

$$\frac{x^2 - y + 1}{y^2 - x + 1} \qquad \frac{\sin x}{e^y} \qquad \frac{\ln(x + y)}{1 + x^2 + y^2}$$

2. Même question, mais cette fois-ci on prend $x \in [-3, 1]$ et $y \in [-5, 7]$.

Exercice 4
1. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que :
$$\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$
Quand l'égalité se produit-elle ?
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$
Quand l'égalité se produit-elle ?

Exercice 5
On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ? Étudier sa parité et sa périodicité. Sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ?
2. Étudier la croissance de f sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$, puis tracer son graphe.

Exercice 6
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est croissante, à valeurs strictement positives. Montrer qu'alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.
2. On suppose que f et g sont croissantes. Montrer que $f + g$ et $f \circ g$ sont nécessairement croissantes. Donner un exemple où le produit fg ne l'est pas (pensez au cas où une des fonctions prend des valeurs négatives), et un autre où le quotient ne l'est pas non plus.
3. On suppose maintenant f croissante et g décroissante sur I. Montrer que $f \circ g$ est décroissante. Que peut-on dire de $f + g$?

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $(f \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq a$. Montrer que f n'est pas croissante sur l'intervalle d'extrémités a et $f(a)$.
3. On suppose que f est strictement monotone. Montrer que, ou bien f est strictement décroissante, ou bien $f(x) = x$ pour tout x.
4. Trouver un exemple de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strictement décroissante et telle que $(g \circ g)(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8
Tracer le graphe de $f(x) = |x+1| - |x-1|$. (Indication : en scindant $\mathbb{R}$ en un certain nombre d'intervalles, donner des expressions de f sur chacun d'eux, où la valeur absolue n'intervient plus.)