TD n° 1 — Nombres réels

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $2x + 3 = 0$
b) $(x - 2)(x^2 - 1) = 0$
c) $x^2 + 4x + 3 = 0$
d) $x^2 - 4x + 4 = 0$
e) $x^2 + x + 1 = 0$
f) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ (on pourra remarquer que 1 est racine évidente puis factoriser l'expression).

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $(2x + 1)(x + 2) \leq 0$
b) $\dfrac{2x+1}{x+2} \leq 0$
c) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 > 0$
d) $|x - 9| \leq 2$
e) $\dfrac{x-2}{x+3} \geq \dfrac{x}{x-1}$
f) $1 \leq \sqrt{3x^2 - 2} \leq 2$

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
a) $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| \leq 3$
b) $\sqrt{3x + 1} - x > 0$
c) $e^{3x} - 6e^{2x} = 6 - 11e^x$
d) $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) - 2\ln(x) = 0$

Exercice 4
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
a) Montrer qu'il existe un nombre rationnel r strictement compris entre a et b.
b) En déduire que l'intervalle $]a, b[$ contient une infinité de nombres rationnels.

Exercice 5
Si x est un nombre réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, qui est (par définition) l'unique entier relatif satisfaisant la double inégalité :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

1. Déterminer les valeurs suivantes : $\lfloor 1.5 \rfloor$, $\lfloor -1.5 \rfloor$, $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor 0 \rfloor$.
2. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ entre -3 et 3.
3. Donner un encadrement de $\lfloor x \rfloor$ en fonction de x.
4. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Si oui, les démontrer, sinon, donner un contre-exemple.
   (a) Pour tout réel x, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$;
   (b) Pour tout réel x, $\dfrac{\lfloor 2x \rfloor}{2} = \lfloor x \rfloor$;
   (c) Pour tout réel x et tout entier n strictement positif, $0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n - 1$