

Développements limités

Développements limités, façon Taylor-Young, au voisinage de 0 (à connaître par cœur) :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

Développements limités qu'on calcule aisément à partir des précédents :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\operatorname{argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

En physique, on utilise fréquemment des développements limités d'ordre 1 :

$$(1+x)^n = 1 + nx + x\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\varepsilon(x)$$

$$\sin x = x + x^2\varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + x^2\varepsilon(x)$$