Entraînement sur les récurrences

Exercice 1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 2. Soit $a \in [0, +\infty[$ un réel fixé. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Corrigé 1. Nous allons démontrer cette égalité par récurrence sur n. Initialisation : pour $n = 1$, l'égalité s'écrit

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{(1+1)(2+1)}{6}$$

ce qui est vrai puisque les deux membres sont égaux à 1. Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$, ce qu'on voulait.

Corrigé 2. Nous allons démontrer cette inégalité par récurrence sur n. Initialisation : pour $n = 1$ l'inégalité s'écrit $(1 + a)^1 \geq 1 + a$, ce qui est vrai. Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

On veut montrer que
$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$
Or, en partant de l'hypothèse et en multipliant des deux côtés par $(1+a)$, qui est un réel strictement positif, on obtient
$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$
c'est-à-dire
$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2.$$
Il en résulte que
$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$
car $na^2 \geq 0$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$, ce qu'on voulait.