Continuité des fonctions réelles

CPP Bordeaux

22 décembre 2013

1 Domaine de définition, adhérence

Définition. Une fonction réelle f est une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La partie D est appelée ensemble (ou domaine) de définition de la fonction.

Une fonction peut être définie de plusieurs façons :

– Par une formule explicite : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\cos x}$

– Abstraitement : $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers compris entre 0 et x.

Supposons qu'on souhaite étudier la limite d'une fonction en un point où elle n'est pas définie, par exemple

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Dans cet exemple, la démarche a bien un sens car on peut calculer les valeurs de $\frac{\sin x}{x}$ pour x aussi proche de 0 que l'on veut [1].

Afin de bien clarifier les choses dans le cas général, on introduit la notion de point adhérent au domaine de définition.

Définition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) On dit que x_0 est **adhérent** à D si, pour tout réel $\delta > 0$,

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D \neq \emptyset$$

(2) On note $\overline{D}$ l'ensemble des points adhérents à D.

Intuitivement, $\overline{D}$ est l'ensemble des réels que l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut par des éléments de D.

Il est clair que tout point de D est adhérent à D, c'est-à-dire que $D \subseteq \overline{D}$. En général, $\overline{D}$ est strictement plus grand que D.

Exemple. a) Si $D = [0, 1[$, alors $\overline{D} = [0, 1]$.

b) Si $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$, alors $\overline{D} = [0, +\infty[$.

c) Si $D = \mathbb{Q}$, alors $\overline{D} = \mathbb{R}$.

d) Si $D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, alors $\overline{D} = D \cup \{0\}$.

Proposition. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors x_0 appartient à $\overline{D}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de D qui converge vers x_0.*

1. Nous insistons sur ce point car les programmes actuels de la classe de terminale scientifique ne définissent pas la notion de limite finie en un point où la fonction n'est pas définie.

2 Limite d'une fonction en un point

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D}$. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 si :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que, pour tout } x \in D,$$
$$|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou, avec des quantificateurs,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ceci se traduit de la façon suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit), il existe $\delta > 0$ tel que, si x est à une distance inférieure à δ de x_0, alors $f(x)$ est à une distance inférieure à ε de ℓ. Insistons sur le fait que δ dépend de ε !

Notons également que seuls les ε assez petits sont importants dans la définition. En fait, pour vérifier que f admet ℓ pour limite en x_0, il suffit de montrer que la propriété ci-dessus est vraie pour tout ε plus petit que 1, ou que 10^{-42}, ou que toute quantité arbitraire fixée à l'avance.

Pour exprimer le fait que f admet ℓ pour limite en x_0, nous noterons

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$$

On peut aussi dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0.

Pour que ceci ait un sens, il faut montrer l'unicité de la limite, quand elle existe.

Proposition. *Si une fonction admet ℓ et ℓ' pour limites en un même point x_0, alors $\ell = \ell'$.*

Démonstration. Même principe que pour l'unicité de la limite d'une suite. □

Nous avons clairement les équivalences :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0$$

Proposition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$. Si f admet une limite en x_0, alors celle-ci est forcément égale à $f(x_0)$.*

Démonstration. Soit ℓ la limite de f en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

En particulier, en prenant $x = x_0$, la condition $|x - x_0| \leq \delta$ est satisfaite, donc

$$|f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ainsi $|f(x_0) - \ell|$ est un réel positif inférieur à toute quantité strictement positive, donc est nul, c'est-à-dire que $\ell = f(x_0)$. □

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite en x_0, c'est-à-dire (d'après la proposition) si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2.1 Prolongement par continuité

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D} \setminus D$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 s'il existe une fonction $g : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ continue en x_0 telle que $g_{|D} = f$.

Proposition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D} \setminus D$. Alors f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si f admet une limite (finie) en x_0.*

2.2 Limites à droite et à gauche

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D}$.

(1) On dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0 si la restriction de f à $D \cap]x_0, +\infty[$ admet ℓ pour limite en x_0. On note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

(2) On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 si la restriction de f à $D \cap]-\infty, x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0. On note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Pour que la limite à droite existe, il faut que x_0 soit un point adhérent à $D \cap]x_0, +\infty[$. Notons également que, même dans le cas où f est définie en x_0, la valeur $f(x_0)$ n'intervient plus dans le calcul de la limite à droite, puisqu'on a enlevé x_0 de l'ensemble de définition.

On peut faire la même remarque pour la limite à gauche.

Remarque. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$.

a) La fonction f admet une limite en x_0 (c'est-à-dire, f est continue en x_0) si et seulement si elle admet $f(x_0)$ comme limite à droite et à gauche en x_0.

b) Si f admet des limites distinctes à droite et à gauche en x_0, alors f n'admet pas de limite en x_0.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction égale à 1 sur $\mathbb{R}^*$, et nulle en 0. Alors

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$$

et pourtant f n'admet pas de limite en 0 (elle est discontinue en 0).

2.3 Caractérisation séquentielle de la limite

L'idée est très simple : pour faire tendre x vers x_0, on peut prendre une suite qui converge vers x_0.

Proposition. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D}$. Alors f admet ℓ pour limite en x_0 si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de D qui converge vers x_0, la suite $f(u_n)$ converge vers ℓ.*

Démonstration. $\Rightarrow$. Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, et soit (u_n) une suite qui converge vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

D'autre part, on sait que

$$\exists N_\delta \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\delta, |u_n - x_0| \leq \delta$$

on en déduit que

$$\forall n \geq N_\delta, |f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$$

$\Leftarrow$. Nous allons montrer la contraposée, à savoir : si $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$, alors il existe une suite (u_n) d'éléments de D qui converge vers x_0, telle que $f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ.

Supposons que f n'admette pas ℓ pour limite en x_0. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D, |x - x_0| \leq \delta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in D, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - \ell| > \varepsilon$$

Mais alors, la suite (u_n) converge vers x_0 et la suite $f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ. Ce qu'on voulait. □

Exemple. a) On sait que $\lim_{x\to\pi} \sin x = 0$. D'après le critère séquentiel on en déduit que, pour toute suite (u_n) qui converge vers π, la suite $\sin(u_n)$ converge vers 0.

b) Soit $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nous allons montrer que δ n'est pas continue en 0 à l'aide du critère séquentiel. Soit en effet la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$, qui converge vers 0. Comme les u_n sont des nombres irrationnels, $\delta(u_n) = 0$ pour tout n, donc la suite $\delta(u_n)$ converge vers 0. Sachant que $\delta(0) = 1$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \delta(u_n) \neq \delta(0)$$

donc δ n'est pas continue en 0.

c) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous allons montrer que f n'a pas de limite en 0 à l'aide du critère séquentiel. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers 0. D'autre part,

$$f(u_n) = \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin(2n\pi) = 0$$

donc la suite $f(u_n)$ est constante égale à 0, et converge vers 0. De même, la suite $f(v_n)$ est constante égale à 1. Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(v_n)$$

Or, d'après le critère séquentiel, si f avait une limite en 0 alors $f(u_n)$ et $f(v_n)$ convergeraient toutes les deux vers cette même limite. Donc f n'a pas de limite en 0.

2.4 Opérations algébriques sur les limites

Théorème. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $x_0 \in \overline{D}$. On suppose que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$$

Alors

(1) *La fonction $f + g$ admet $\ell + \ell'$ pour limite en x_0.*

(2) *La fonction fg admet $\ell\ell'$ pour limite en x_0.*

(3) *Supposons $\ell \neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0, et admet $\frac{1}{\ell}$ pour limite en x_0.*

On appelle **voisinage** de x_0 une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert contenant x_0. Dans ce texte, ce sera le plus souvent un intervalle ouvert contenant x_0.

Démonstration. Grâce à la caractérisation séquentielle de la limite, on se ramène à la proposition analogue pour les limites de suites. Le seul point à montrer est que, si $\ell \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0. Pour cela, on peut supposer que $\ell > 0$. En appliquant la définition de limite avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, on trouve qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$$

Or :

$$|f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2} \Longleftrightarrow \frac{\ell}{2} \leq f(x) \leq \frac{3\ell}{2}$$

En particulier, pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $f(x)$ est supérieur ou égal à $\frac{\ell}{2}$, donc n'est pas nul, ce qu'on voulait. □

On peut récupérer les théorèmes sur les limites de suites (par exemple, le théorème des gendarmes) et les adapter pour les limites de fonctions.

2.5 Composition des limites

On peut aussi composer les limites de fonctions.

Théorème. *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f(D_1) \subseteq D_2$, et soit $x_0 \in \overline{D_1}$. On suppose que f admet ℓ pour limite en x_0. Alors ℓ appartient à $\overline{D_2}$. De plus, si g admet une limite en ℓ, alors $g \circ f$ admet la même limite en x_0.*

En d'autres termes, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $\lim_{y \to \ell} g(y)$ existe, alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y)$$

La réciproque est fausse : il se peut que le membre de gauche existe, mais pas celui de droite. Par exemple, si f est la fonction nulle, alors $g \circ f$ est la fonction constante égale à $g(0)$, donc admet une limite en tout point, alors que la limite de g en 0 peut très bien ne pas exister.

Démonstration. Comme x_0 est adhérent à D_1, il existe une suite (u_n) d'éléments de D_1 qui converge vers x_0. Comme f admet ℓ pour limite en x_0, on en déduit que la suite $(f(u_n))$ (à valeurs dans D_2) converge vers ℓ, d'où $\ell \in \overline{D_2}$.

Supposons à présent que $\lim_{y\to\ell} g(y)$ existe, notons-la ℓ'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in D_2, |y - \ell| \leq \delta \Longrightarrow |g(y) - \ell'| \leq \varepsilon$$

d'autre part, comme f admet ℓ pour limite en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D_1, |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \delta$$

En regroupant le tout, on trouve :

$$\forall x \in D_1, |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |g(f(x)) - \ell'| \leq \varepsilon$$

ce qu'on voulait. □

2.6 Limites infinies

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D}$.

(1) On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq M$$

(2) On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq M$$

On note respectivement :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Remarque. a) Si f tend vers $\pm\infty$ en x_0, alors f n'est pas définie en x_0. Autrement dit, x_0 est adhérent à D sans lui appartenir.

b) On peut également définir des limites infinies à droite et à gauche en x_0.

A partir de là, on peut récupérer ce qui a été fait pour les suites : les opérations algébriques sur les limites infinies sont les mêmes.

2.7 Limites à l'infini

Soit D une partie **non majorée** de $\mathbb{R}$. Alors il existe une suite d'éléments de D qui tend vers $+\infty$. On pourrait dire, par analogie avec les définitions précédentes, que $+\infty$ est adhérent à D.

On peut alors définir la notion de limite en $+\infty$ d'une fonction définie sur D.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, avec D non majoré. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D, x \geq A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$
On laisse au lecteur le soin d'expliciter les définitions suivantes :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{etc.}$$

Remarque. a) On ne demande pas d'apprendre par cœur les 6 définitions de limites à l'infini. Il faut cependant être capable de les reconstituer.

b) Pour manipuler les limites infinies, on peut aussi utiliser le critère séquentiel, qui reste valable dans tous les cas de figure possibles.

3 Fonctions équivalentes

Définition. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $x_0 \in \overline{D}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $k : V \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in V \cap D, f(x) = g(x)k(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} k(x) = 1$$

Pour exprimer cela, on note :
$$f \sim_{x_0} g$$
ou encore :
$$f(x) \sim g(x) \text{ quand } x \to x_0$$

Remarque. a) Supposons que g ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si :
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
C'est cette propriété qu'il faut retenir dans la pratique. On peut aussi considérer le cas (très fréquent) où $f(x_0) = g(x_0) = 0$, dans ce cas le critère reste le même mais on considère la limite quand $x \to x_0$ avec $x \neq x_0$.

b) Soit $c \in \mathbb{R}^*$ une constante non nulle, alors pour toute fonction f on a :
$$f \sim_{x_0} c \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

c) En revanche, $f \sim_{x_0} 0$ signifie que f est nulle dans un voisinage de x_0, ce qui est une condition beaucoup plus forte.

d) Bien entendu, on peut aussi définir les équivalents en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exemple. Quelques équivalents classiques en 0, à connaître absolument :
$$\sin x \sim_0 x \qquad \ln(1+x) \sim_0 x$$
$$e^x - 1 \sim_0 x \qquad \sqrt{1+x} - 1 \sim_0 \frac{x}{2}$$

Exemple (très difficile)**.** Soit $\pi(x)$ la fonction de comptage des nombres premiers. Le théorème des nombres premiers, démontré en 1896 par Hadamard et de la Vallée Poussin, affirme que :

$$\pi(x) \sim_{+\infty} \frac{x}{\ln(x)}$$

En particulier, $n\ln(n)$ est un équivalent du n-ième nombre premier.

Proposition. *Étant donnés D et $x_0 \in \overline{D}$, la relation $\sim_{x_0}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions $D \to \mathbb{R}$.*

Démonstration. Laissée en exercice au lecteur. □

On peut multiplier et diviser des équivalents.

Proposition. (1) *Si $f \sim_{x_0} g$ et si $u \sim_{x_0} v$ alors :*

$$fu \sim_{x_0} gv$$

(2) *Si $f \sim_{x_0} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0, alors :*

$$\frac{1}{f} \sim_{x_0} \frac{1}{g}$$

Exemple. Soit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k$$

un polynôme à coefficients réels, où a_n et a_k sont non nuls. Alors :

$$P(x) \sim_0 a_k x^k \quad \text{et} \quad P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$$

En divisant ces équivalents, on retrouve (sous forme allégée) les calculs bien connus de limite en 0 et $+\infty$ de fractions rationnelles. Par exemple :

$$\frac{x^4 + 3x}{x^3 + x} \sim_0 \frac{3x}{x} \sim_0 3$$

donc cette fonction tend vers 3 quand x tend vers 0.

On peut aussi composer des équivalents à droite par une même fonction.

Proposition. *Si $f \sim_{x_0} g$ et si h est une fonction telle que*

$$\lim_{y \to y_0} h(y) = x_0$$

alors

$$f \circ h \sim_{y_0} g \circ h$$

Remarque. Il faut surtout insister sur les opérations qu'on n'a pas le droit de faire avec les équivalents :

a) On ne peut **pas additionner** deux équivalents : $x + x^2 \sim_0 x$ et $-x + x^3 \sim_0 -x$. Pourtant,

$$(x + x^2) + (-x + x^3) = x^2 + x^3 \not\sim_0 0$$

b) La **composition** ne marche que **dans un seul sens** : il est clair que $x^2 + x \sim x^2$ quand $x \to +\infty$. Pourtant, il est faux que e^{x^2+x} soit équivalente à e^{x^2} quand $x \to +\infty$, car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} e^x \neq 1.$$

c) On ne peut **pas dériver** les équivalents : si $f \sim_{x_0} g$ rien n'assure que $f' \sim_{x_0} g'$.

4 Propriétés des fonctions continues

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue si elle est continue en tout point de D.

Proposition. *La somme, le produit, le quotient et la composée de deux fonctions continues sont continues partout où elles sont définies.*

Par exemple, si f est continue sur D, alors $|f|$ est également continue sur D, par composition avec la fonction valeur absolue.

4.1 Théorème des valeurs intermédiaires

On l'appelle plus familièrement le TVI. Il est démontré par Cauchy en 1821 dans son Cours d'analyse de l'École royale polytechnique.

Théorème (Valeurs intermédiaires)**.** *Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout réel r compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = r$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(a) < r < f(b)$. Nous construisons par récurrence une suite d'intervalles $[a_k, b_k]$, de la façon suivante.

– $[a_0, b_0] = [a, b]$

– Supposons $[a_k, b_k]$ construit. Soit $m_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ le milieu de cet intervalle. Si $f(m_k) = r$, on s'arrête. Sinon, on pose

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [m_k, b_k] & \text{si } f(m_k) < r \\ [a_k, m_k] & \text{si } f(m_k) > r \end{cases}$$

Si la suite d'intervalles ainsi construite est finie, alors on a trouvé un c tel que $f(c) = r$. Sinon, nous avons, par construction, les propriétés suivantes pour tout k :

1) $f(a_k) < r < f(b_k)$
2) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$
3) $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$

En particulier les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune c. Donc $f(a_k)$ et $f(b_k)$ convergent vers $f(c)$. Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité 1), on trouve que $f(c) = r$, ce qu'on voulait. □

Remarque.

a) Si f est donnée par une formule (implémentable sur machine), alors la démontration ci-dessus fournit un algorithme qui permet de calculer une valeur approchée de c avec la précision souhaitée.

b) Cet algorithme calcule une valeur de c telle que $f(c) = r$. Il se peut qu'il en existe d'autres, et même une infinité. Par exemple, la fonction $f : [0, 1] \to [-1, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue, et admet une infinité (dénombrable) de zéros dans $[0, 1]$.

Corollaire. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Cela découle du fait suivant : une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous $a, b \in X$ avec $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est inclus dans X.

Remarque. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue alors $f([a, b])$ est un intervalle. Si $f(a) \leq f(b)$, alors d'après le TVI on a :

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$$

mais en général l'intervalle de gauche est plus petit que celui de droite. Par exemple, si f est la fonction $x \mapsto x^2$ alors $f([-1, 1]) = [0, 1]$ mais $[f(-1), f(1)] = \{1\}$. L'égalité est cependant vraie si f est une fonction strictement croissante : c'est le théorème de la bijection, que l'on verra plus loin.

Voici un cas particulier du TVI, démontré en 1817 par Bolzano.

Corollaire (Théorème de Bolzano)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. En effet, $f(a)f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, donc que 0 est compris entre les deux. □

Exemple. Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

La propriété des valeurs intermédiaires correspond à une notion intuitive : il est possible de dessiner le graphe de la fonction « d'un seul trait » (c'est-à-dire sans soulever le crayon).

Cette remarque amène à se poser la question : n'y a-t-il pas équivalence entre la propriété des valeurs intermédiaires et la continuité ? La réponse est négative. Un contre-exemple nous est donné par la fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle satisfait bien la propriété des valeurs intermédiaires pour chaque couple de points dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, le théorème de Darboux affirme que toute fonction qui admet une primitive satisfait la propriété des valeurs intermédiaires.

4.2 Théorème des bornes

Théorème (Théorème des bornes)**.** *Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$, et atteint ses bornes.*

Démonstration. Commençons par montrer que f est majorée. Raisonnons par l'absurde : si f n'est pas majorée, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme $[a, b]$ est borné, d'après Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers un certain x. Comme $[a, b]$ est fermé, x appartient à $[a, b]$. Par continuité de f, la suite $f(x_{n_k})$ converge vers $f(x)$. Mais ceci est impossible puisque $f(x_{n_k})$ n'est pas bornée. Donc f est majorée.

Soit M la borne supérieure de l'ensemble $f([a, b])$, nous allons montrer que M est atteint par la fonction f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $M - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $f([a, b])$, donc il existe $y_n \in [a, b]$ tel que $f(y_n) > M - \frac{1}{n}$. Comme $f(y_n) \leq M$ pour tout n, on en déduit (par le th. des gendarmes) que la suite $f(y_n)$ converge vers M. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite (y_{n_k}) de (y_n) qui converge vers un certain $y \in [a,b]$. Mais alors, $f(y)$ est égal à la limite de la suite $f(y_{n_k})$, donc $f(y) = M$, ce qu'on voulait.

On montre par la même méthode que f est minorée, et que la borne inférieure est atteinte. □

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que $f([a,b])$ est un intervalle. D'après le théorème des bornes, il existe des réels m et M tels que

$$f([a,b]) = [m, M]$$

Remarque. Le fait que $[a,b]$ soit un intervalle **fermé borné** est très important, comme l'illustrent les contre-exemples ci-dessous :

a) $f(x) = x$ définie sur $[0, +\infty[$ n'est pas majorée.

b) $f(x) = \frac{x}{(1+x)}$ définie sur $[0, +\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $]0, 1]$ n'est pas majorée.

d) $f(x) = 1 - x$ définie sur $]0, 1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.

4.3 Théorème de la bijection

Théorème (De la bijection)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors :*

(1) *L'ensemble $J := f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I. La fonction f réalise une bijection entre I et J.*

(2) *La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue strictement monotone, de même sens de variations que f.*

(3) *Si f est dérivable en un point $x_0 \in I$, et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration. (1). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue, l'image de I par f est un intervalle. Comme f est strictement monotone, elle est injective, donc réalise une bijection avec son image. Sachant cela, il est facile de vérifier que les bornes de J sont les limites de f aux bornes de I. (2). On peut supposer que f est strictement croissante. Montrons d'abord que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient a et b dans J tels que $a < b$, et soient $x = f^{-1}(a)$ et $y = f^{-1}(b)$. Alors l'inégalité $x \geq y$ est impossible car elle impliquerait $f(x) \geq f(y)$, c'est-à-dire $a \geq b$. Nous avons donc $x < y$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante. Reste à voir que f^{-1} est continue. Soit $y_0 \in J$, et soit $\varepsilon > 0$. Supposons que y_0 soit intérieur à J, alors $f^{-1}(y_0)$ est intérieur à I. Il existe donc a et b dans I tels que l'on ait

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon \leq a < f^{-1}(y_0) < b \leq f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

Comme f est strictement croissante, il vient :

$$f(a) < y_0 < f(b)$$

Posons $\eta = \min(y_0 - f(a), f(b) - y_0)$, c'est un réel strictement positif qui satisfait par construction :

$$|y - y_0| \leq \eta \Longrightarrow f(a) \leq y \leq f(b)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
f(a) \leq y \leq f(b) &\Longrightarrow a \leq f^{-1}(y) \leq b && \text{par croissance de } f^{-1} \\
&\Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon && \text{par construction de } a \text{ et } b
\end{aligned}$$

Ceci montre que f^{-1} est continue en y_0. Si y_0 est une extrémité de J, on procède de façon analogue. (3). Supposons f dérivable en x_0. Soit $y_0 = f(x_0)$ et soit $y \in J$, on s'intéresse à la quantité

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Posons $x = f^{-1}(y)$, alors cette quantité s'écrit

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Comme f^{-1} est continue en y_0, nous avons :

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

Par composition des limites, on en déduit que

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

d'où le résultat. □

Remarque (sur la nature de l'intervalle image)**.** Pour déterminer l'intervalle J image de I, il faut calculer les limites de f aux extrémités de I, et tenir compte du sens de variations de f. On constate de plus que I et J « ont les mêmes crochets ». Par exemple

a) si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue strictement croissante, alors

$$f([a, b[) = [f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)[$$

b) si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue strictement croissante, alors

$$f([a, +\infty[) = [f(a), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$$

c) si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue strictement décroissante, alors

$$f([a, +\infty[) =] \lim_{x \to +\infty} f(x), f(a)]$$

Remarque (relation entre le graphe de f et celui de f^{-1})**.** Par définition de f^{-1}, l'application $(x, y) \mapsto (y, x)$ établit une bijection entre le graphe de f et celui de f^{-1}. En d'autres termes, le graphe de f^{-1} dans le plan $\mathbb{R}^2$ est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple. Le théorème de la bijection est très utile pour démontrer l'existence de fonctions réciproques des fonctions usuelles, et établir leurs principales propriétés. Exemples :

a) La fonction $[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$, est continue strictement croissante, et réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur lui-même. On en déduit que l'application réciproque $y\mapsto\sqrt{y}$ est continue strictement croissante. De plus, la fonction $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, et sa dérivée $x\mapsto 2x$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Donc la fonction $y\mapsto\sqrt{y}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa dérivée est

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Par contre, $y\mapsto\sqrt{y}$ n'est pas dérivable en 0, car sa courbe représentative a une tangente verticale en ce point.

b) Plus généralement, si l'on fixe un entier $n\geq 2$, la fonction $[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^n$, est continue strictement croissante, et réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur lui-même. L'application réciproque $y\mapsto\sqrt[n]{y}$ est continue strictement croissante, et dérivable sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est donnée par

$$y\mapsto\frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

c) Plus compliqué : comment définir des fonctions trigonométriques réciproques ? Par exemple, la fonction arcsinus. Bien entendu, la fonction sinus n'est pas strictement monotone. Pour appliquer le théorème de la bijection, il faut donc se restreindre à un intervalle (le plus grand possible) sur lequel elle l'est. Le choix standard est $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. La fonction sinus réalise bien une bijection

$$\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$

la bijection réciproque s'appelle la fonction arcsinus :

$$\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Cette fonction arcsinus est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout $t\in]-1,1[$, sa dérivée en t est donnée par :

$$\arcsin'(t)=\frac{1}{\cos(\arcsin t)}$$

Pour simplifier un peu cette expression, on utilise l'identité trigonométrique

$$\cos^2(\arcsin t)+\sin^2(\arcsin t)=1$$

Sachant que $\arcsin t$ appartient à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, son cosinus est positif ou nul, d'où :

$$\cos(\arcsin t)=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin t)}=\sqrt{1-t^2}$$

Il en résulte que :

$$\arcsin'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Remarque. a) L'injectivité de f découle du fait que f est strictement monotone. La continuité de f n'intervient pas à ce stade.

b) Plus étonnant : la démonstration de la continuité de f^{-1} n'utilise pas la continuité de f. En fait, on peut montrer le résultat suivant : une bijection monotone entre deux intervalles est toujours continue.

c) Par contre, la dérivabilité de f^{-1} est *grosso modo* équivalente à la dérivabilité de f, si l'on met de côté les cas d'annulation de f'.

Une fonction strictement monotone sur un intervalle est clairement injective. La réciproque est fausse en général (il existe des fonctions injectives non monotones), mais devient vraie si l'on impose à la fonction d'être continue.

Proposition. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue injective. Alors f est strictement monotone.*

Démonstration. On note d'abord le fait suivant : la fonction f est strictement monotone si et seulement si :

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \quad a < b < c \Longrightarrow f(b) \text{ est strictement compris entre } f(a) \text{ et } f(c).$$

Montrons le résultat par l'absurde. Supposons que f n'est pas strictement monotone, alors par négation de la phrase ci-dessus il existe $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$ et $f(b)$ n'est pas compris entre $f(a)$ et $f(c)$, c'est-à-dire que :

$$f(b) \geq \max(f(a), f(c)) \quad \text{ou} \quad f(b) \leq \min(f(a), f(c)).$$

Supposons que l'on soit dans le premier cas. Si $f(a) = f(b)$ ou si $f(b) = f(c)$, alors f n'est clairement pas injective. Donc on se ramène au cas de figure où $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. Mais alors, en appliquant deux fois le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve que tout réel t strictement compris entre $f(b)$ et $\max(f(a), f(c))$ a un antécédent dans $]a,b[$ et un autre dans $]b,c[$. Donc f n'est pas injective. On conclut de même dans le second cas. □

5 Fonctions négligeables

Définition. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $x_0 \in \overline{D}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in V \cap D, f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Pour exprimer cela, on note :

$$f =_{x_0} o(g)$$

ou encore :

$$f(x) = o(g(x)) \text{ quand } x \to x_0$$

Attention : la notation $f = o(g)$ (notation de Landau) n'est qu'une convention d'écriture. On peut avoir $f = o(g)$ et $h = o(g)$ sans que f soit égale à h. Si l'on voulait vraiment être rigoureux, il faudrait écrire $f \in o(g)$. Plus précisément, $o(g)$ désigne **l'ensemble des fonctions négligeables** devant g.

Remarque. a) Supposons que g ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

C'est cette propriété qu'il faut retenir dans la pratique.

b) Pour toute fonction f on a :

$$f =_{x_0} o(1) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

c) Bien entendu, on peut aussi définir la notion de fonction négligeable en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exemple. a) Au voisinage de 0, nous avons :

$$x^2 = o(x)$$

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$, nous avons :

$$x^n = o(x^{n-1})$$

b) Au voisinage de $+\infty$, nous avons, pour tout entier $n \geq 1$:

$$x^{n-1} = o(x^n)$$

5.1 Croissances comparées (voir le formulaire distribué en cours)

Ces résultats constituent des exemples classiques de fonctions négligeables.

5.2 Opérations sur les fonctions négligeables

Proposition. *Soient f_1, f_2, etc. des fonctions définies sur D, et soit $x_0 \in \overline{D}$. Alors*

(1) Si $f_1 =_{x_0} o(g)$ et $f_2 =_{x_0} o(g)$ alors $f_1 + f_2 =_{x_0} o(g)$.

(2) Si $f =_{x_0} o(g)$ alors $fh =_{x_0} o(gh)$ pour toute fonction h.

(3) Si $f =_{x_0} o(g)$ alors $\lambda f =_{x_0} o(g)$ pour tout réel λ.

(4) Si $f =_{x_0} o(g)$ et $g =_{x_0} o(h)$ alors $f =_{x_0} o(h)$.

Démonstration. (1) Il existe des fonctions ε_1 et ε_2, définies sur des voisinages V_1 et V_2 de x_0, qui tendent vers 0 en x_0, telles que :

$$f_1 = g\varepsilon_1 \text{ sur } V_1 \qquad \text{et} \qquad f_2 = g\varepsilon_2 \text{ sur } V_2$$

d'où :

$$f_1 + f_2 = g(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{ sur } V_1 \cap V_2$$

Comme $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de x_0 et que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ tend vers 0 en x_0, on en déduit que $f_1 + f_2 =_{x_0} o(g)$. Les points (2), (3) et (4) sont tout aussi immédiats. □

Remarque. Il découle du point (2) que, si $f_1 =_{x_0} o(g_1)$ et $f_2 =_{x_0} o(g_2)$ alors $f_1 f_2 =_{x_0} o(g_1 g_2)$, mais on ne peut rien dire de mieux en général.

Exemple. a) En 0 nous avons $x^3 + x^5 = o(x^2)$ d'après le point (1).

b) En 0^+ nous avons $\ln x = o\left(\frac{1}{x}\right)$, d'où d'après le point (2) :

$$\frac{\ln(x)}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{quand } x \to 0^+$$

c) En $+\infty$ nous avons $\ln x = o(x)$ et $x = o(e^x)$, d'où $\ln x = o(e^x)$ d'après le point (4).

5.3 Lien avec les équivalents

Proposition. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $x_0 \in \overline{D}$. Alors :*

$$f \sim_{x_0} g \Longleftrightarrow f - g =_{x_0} o(g)$$

Démonstration. En effet, $f \sim_{x_0} g$ si et seulement s'il existe une fonction k définie sur un voisinage V de x_0 telle que :

$$\forall x \in V \cap D, f(x) = g(x)k(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} k(x) = 1$$

Si l'on pose $\varepsilon(x) = k(x) - 1$, alors la condition ci-dessus se réécrit :

$$\forall x \in V \cap D, f(x) - g(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui est équivalent à $f - g =_{x_0} o(g)$. □

Exemple. Cette proposition permet de retrouver plus facilement certains équivalents. Par exemple, nous avons

$$\ln(2x + 3) \sim_{+\infty} \ln(x)$$

En effet, $\ln(2x + 3) - \ln(x) = \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right)$ qui tend vers $\ln(2)$ quand $x \to +\infty$. Il en résulte que

$$\ln\left(2 + \frac{3}{x}\right) =_{+\infty} o(\ln(x))$$

d'où le résultat.

Proposition. *(1) Si $f \sim g$ alors $o(f) = o(g)$, c'est-à-dire que toute fonction négligeable devant f est négligeable devant g, et réciproquement.*

(2) Si $f \sim g$ et si $h = o(g)$ alors :

$$f + h \sim g \qquad \text{et} \qquad f \sim g + h.$$

(2) Si $f \sim g$, si $h_1 = o(g)$ et si $h_2 = o(g)$ alors :

$$f + h_1 \sim g + h_2.$$

Démonstration. (1) Supposons que $f \sim g$ et soit $h = o(f)$. Alors $f = gk$ avec k qui tend vers 1, et $h = f\varepsilon$ avec ε qui tend vers 0, d'où

$$h = gk\varepsilon$$

avec $k\varepsilon$ qui tend vers 0. Autrement dit, $h = o(g)$. Ceci montre que $o(f) \subseteq o(g)$. Par symétrie de $\sim$ le même raisonnement montre l'autre inclusion, d'où $o(f) = o(g)$.

(2) Supposons que $f \sim g$ et soit $h = o(g)$. Alors $f = gk$ avec k qui tend vers 1, et $h = g\varepsilon$ avec ε qui tend vers 0, d'où

$$f + h = g(k + \varepsilon)$$

avec $k+\varepsilon$ qui tend vers 1. Donc $f+h \sim g$. D'autre part, d'après la question précédente, $h = o(f)$, donc le même raisonnement montre aussi que $f \sim g + h$.

(3) D'après le résultat précédent il vient : $f + h_1 \sim g$ et $f \sim g + h_2$. Sachant que $g \sim f$ on en déduit par transitivité que $f + h_1 \sim g + h_2$. □

Exemple. En $+\infty$ nous avons $(\ln x)^2 = o(x)$ et $\sqrt{x} = o(x)$, d'où

$$x + (\ln x)^2 \sim_{+\infty} x + \sqrt{x}$$

ce que l'on peut redémontrer facilement à la main avec des limites.