

## Corrigé du TD n° 9

**Exercice 1**

1. Montrer, à partir de la définition donnée en cours, que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

**Corrigé :** D'après la définition, l'énoncé «  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  » se traduit de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \Rightarrow |x^2| \leq \varepsilon$$

On souhaite montrer que cet énoncé est vrai, c'est-à-dire que, étant donné un réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  tel que l'implication  $|x| \leq \delta \Rightarrow |x^2| \leq \varepsilon$  soit vraie pour tout réel  $x$ . Pour cela, il suffit de prendre  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ , d'où le résultat.

2. Même question pour :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

**Corrigé :** Comme précédemment, l'énoncé se traduit de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*, |x - 1| \leq \delta \Rightarrow \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2 \right| \leq \varepsilon$$

Pour voir que cet énoncé est vrai, il faut montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  satisfaisant l'implication

$$|x - 1| \leq \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

pour tout réel  $x \in \mathbb{R}^*$ . Autrement dit, il faut traduire la condition  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon$  en une condition sur  $|x - 1|$ . Pour cela, on procède par équivalences successives. Tout d'abord :

$$\left| \frac{1}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon \leq \frac{1}{x} \leq 1 + \varepsilon$$

Pour simplifier, on peut supposer que  $1 - \varepsilon > 0$ , c'est-à-dire que  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . En effet, si l'on peut rendre  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right|$  plus petit que toute quantité  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , alors on peut aussi le rendre plus petit que toute quantité  $\varepsilon \geq 1$ . De façon plus générale, on peut se restreindre à des valeurs suffisamment petites de  $\varepsilon$  quand on manipule la définition de limite d'une fonction en un point. Revenons à nos moutons : si l'on suppose que  $1 - \varepsilon > 0$ , alors

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon \leq \frac{1}{x} \leq 1 + \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon} \leq x \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon} - 1 \leq x - 1 \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} - 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \leq x - 1 \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \end{aligned}$$

Donc, si l'on pose  $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$  (la plus petite des deux quantités en valeur absolue), alors la relation  $|x - 1| \leq \delta$  implique la relation  $\left| \frac{1}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon$ , ce qu'on voulait.

### Exercice 2

1. Traduire par une formule mathématique (avec quantificateurs) l'affirmation

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$$

**Corrigé :** Par définition de la limite, l'affirmation se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in ]-1, +\infty[, |x| \leq \delta \Rightarrow |\ln(1+x)| \leq \varepsilon$$

2. Déterminer un réel  $\delta > 0$  tel que

$$|x| \leq \delta \implies |\ln(1+x)| \leq 10^{-3}$$

**Corrigé :** On cherche comme d'habitude à traduire la condition  $|\ln(1+x)| \leq 10^{-3}$  en une condition sur  $x$ . Nous avons

$$\begin{aligned} |\ln(1+x)| \leq 10^{-3} &\Leftrightarrow -10^{-3} \leq \ln(1+x) \leq 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow e^{-10^{-3}} \leq 1+x \leq e^{10^{-3}} \quad (\text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante}) \\ &\Leftrightarrow e^{-10^{-3}} - 1 \leq x \leq e^{10^{-3}} - 1 \end{aligned}$$

Soit  $\delta = \min(e^{10^{-3}} - 1, 1 - e^{-10^{-3}})$ . Alors  $\delta$  satisfait bien la propriété voulue. Pour ceux qui sont curieux de connaître la valeur exacte de  $\delta$ , on peut faire le raisonnement suivant : l'analyse des variations de la fonction  $t \mapsto e^t + e^{-t}$  montre que celle-ci atteint son minimum en 0, donc ce minimum est égal à 2. En particulier  $e^{10^{-3}} + e^{-10^{-3}} \geq 2$ . On en déduit que  $\delta = 1 - e^{-10^{-3}}$ .

### Exercice 3

- a) Nous avons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la majoration suivante

$$\left| \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1} \right| \leq \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right|$$

D'autre part

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

donc cette quantité tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1} = 0.$$

- b) Comme  $\sin x$  est borné,  $x - \sin x$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x} = +\infty$$

- c) Pour  $x > 1$ , la partie entière de  $\frac{1}{x}$  est nulle. Par conséquent

$$\text{pour tout } x > 1, \quad x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0.$$

Donc la limite cherchée vaut 0.

- d) Nous avons :

$$\frac{\sin(x \ln x)}{x} = \frac{\sin(x \ln x)}{x \ln x} \ln x$$

Si  $x \rightarrow 0$ , alors  $x \ln x \rightarrow 0$ . Donc par composition des limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x \ln x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x} = -\infty.$$

**Exercice 4**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. L'allure du graphe de  $f$  a été vue en TD!
2. On note d'abord que  $f$  est continue sur l'intervalle  $] -\infty, 1[$ , car elle est égale sur cet intervalle à la fonction  $x \mapsto x$ . De même, la fonction  $f$  est continue sur les intervalles  $]1, 4[$  et  $]4, +\infty[$  car elle est égale à des fonctions continues sur chacun de ces intervalles. Il reste à étudier la continuité de  $f$  en 1 et en 4. En 1 nous avons :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x^2 = 1$$

donc les limites à droite et à gauche de  $f$  en 1 sont égales à  $f(1)$ , ce qui montre que  $f$  est continue en 1. On montre de même que  $f$  est continue en 4. On en conclut que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5**

1. La fonction  $f : x \mapsto x[x]$  n'est pas continue. En effet,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1[$ , d'où :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$$

et d'autre part  $f(1) = 1$ , donc la limite à gauche de  $f$  en 1 n'est pas égale à  $f(1)$ , ce qui montre que  $f$  n'est pas continue en 1.

2. Nous allons montrer que la fonction  $g : x \mapsto [x] \sin(\pi x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On note d'abord que  $g$  est continue sur chacun des intervalles de la forme  $]n, n + 1[$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Il reste à montrer que  $g$  est continue en chaque entier relatif. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} g(x) = (n - 1) \cdot 0 = 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} g(x) = n \cdot 0 = 0$$

et  $g(n) = n \sin(n\pi) = 0$ . Donc  $g$  a des limites à droite et à gauche en  $n$  qui sont égales à  $g(n)$ , ce qui montre que  $g$  est continue en  $n$ .

**Exercice 6**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x \sin x$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ . Alors la suite  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$ , et  $\sin(x_n) = 1$  pour tout  $n$ , donc

$$f(x_n) = x_n \sin(x_n) = x_n$$

donc  $f(x_n)$  tend vers  $+\infty$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $y_n = 2n\pi$ . Alors la suite  $(y_n)$  tend vers  $+\infty$ , et  $\sin(y_n) = 0$  pour tout  $n$ , donc

$$f(y_n) = y_n \sin(y_n) = 0$$

donc  $f(y_n)$  tend vers 0.

3. Si la fonction  $f$  avait une limite en  $+\infty$ , alors (d'après le critère séquentiel) les suites  $f(x_n)$  et  $f(y_n)$  tendraient toutes les deux vers cette limite. Or  $f(x_n)$  et  $f(y_n)$  n'ont pas la même limite, donc  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

### Exercice 7

On définit deux suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  en posant :

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Ces deux suites tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . De plus

$$\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$$

Par un raisonnement semblable à celui de l'exercice précédent, on en déduit que la fonction  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite en 0.

### Exercice 8

- a) D'après le cours, la fonction  $f_1$  est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si elle a une limite finie en 0. Or nous avons la majoration :

$$|f_1(x)| = |\sin x| |\sin 1/x| \leq |\sin x|.$$

Comme  $\sin x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0, il en résulte que  $f_1$  tend vers 0 en 0. Donc on peut prolonger  $f_1$  par continuité en 0 en posant :  $f_1(0) = 0$ .

- b) Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$g(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Alors  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $g(0) = 0$ . La fonction  $f_2$  s'écrit

$$f_2(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

On reconnaît le taux d'accroissement de  $g$  entre 0 et  $x$ . Par conséquent,  $f_2$  admet une limite finie en 0, égale à  $g'(0)$ . Calculons donc  $g'$  sur  $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \left( \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Donc  $g'(0) = 0$ . Ainsi, en posant  $f_2(0) = 0$  nous obtenons une fonction  $f_2$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

- c) La fonction  $f_3$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . De plus, on calcule que :

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}.$$

On en déduit que  $f_3$  a pour limite  $-\frac{1}{2}$  quand  $x$  tend vers 1. Et donc en posant  $f_3(1) = -\frac{1}{2}$ , nous obtenons une fonction continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Par contre, en  $-1$  la fonction  $f_3$  ne peut pas être prolongée par continuité, car elle n'admet pas une limite finie en ce point. Donc  $f_3$  n'est pas prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 9

Soit

$$f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$$

1. Nous avons

$$\left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

car  $|\cos x|$  est majoré par 1 et  $1+x^2$  est minoré par 1.

2. Comme la fonction  $f$  est majorée par 1, on sait que  $\text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x)$  est inférieur ou égal à 1. D'autre part on constate que  $f(0) = 1$ , donc 1 est à la fois un majorant et une valeur de la fonction  $f$ . Par conséquent,  $\text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ .

### Exercice 10

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique de période  $T > 0$ . On suppose que  $f$  admet une limite finie (que nous noterons  $\ell$ ) quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Nous allons montrer que  $f$  est constante. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , alors la suite  $x_0 + nT$  tend vers  $+\infty$ , donc la suite  $f(x_0 + nT)$  converge vers  $\ell$ . D'autre part, on montre par récurrence que :

$$f(x_0 + nT) = f(x_0) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c'est-à-dire que la suite  $f(x_0 + nT)$  est constante égale à  $f(x_0)$ . Donc  $f(x_0) = \ell$ . Comme ce raisonnement est valable pour n'importe quelle valeur de  $x_0$ , on en déduit que  $f$  est constante égale à  $\ell$ .

### Exercice 11

La fonction  $f(x) - x$  étant bornée sur  $[x_0, +\infty[$ , il existe un réel  $M$  tel que

$$\forall x \geq x_0, \quad |f(x) - x| \leq M$$

En divisant par  $x$  on trouve

$$\forall x \geq x_0, \quad \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| \leq \frac{M}{x}$$

Quand on fait tendre  $x$  vers  $+\infty$ ,  $\frac{M}{x}$  tend vers 0, donc  $\left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right|$  tend lui aussi vers 0, d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

### Exercice 12

1. On considère la fonction  $f$  donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur l'intervalle  $] -1, 1[$  car elle est égale à la fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  sur cet intervalle. De même, elle est continue sur les intervalles  $] -\infty, -1[$  et  $]1, +\infty[$  car elle est égale à la fonction  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  sur ces intervalles. On en déduit que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si elle est continue en  $-1$  et en  $1$ .

Calculons les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $-1$  :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} ax^2 + bx + c = a - b + c = f(-1)$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \sqrt{1-x^2} = 0$$

Donc  $f$  est continue en  $-1$  si et seulement si  $a - b + c = 0$ . Par un calcul semblable, on trouve que  $f$  est continue en  $1$  si et seulement si  $a + b + c = 0$ . Au final, pour que  $f$  soit continue il faut que  $a, b$  et  $c$  soient solution du système

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Finalement, on se demande si ce système admet des solutions. En additionnant les deux équation on trouve que  $a + c = 0$ , en les soustrayant on trouve que  $b = 0$ . Donc ce système admet une infinité de solutions en prenant  $b = 0$  et  $a = -c$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la formule du binôme de Newton nous avons :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \dots + nx^{n-1} + x^n$$

d'où :

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = n + \binom{n}{2}x + \dots + nx^{n-2} + x^{n-1}$$

Cette quantité tend vers  $n$  quand  $x$  tend vers 0. Donc on peut prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = n$ .

### Exercice 13

Soit  $\ell$  la limite (finie) de  $f$  en  $x_0$ . Prenons  $\varepsilon = 1$  dans la définition de la limite. Alors il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in D$  :

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq 1$$

C'est-à-dire que

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D, \quad \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$$

Donc  $f$  est bornée dans le voisinage  $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  de  $x_0$ , ce qu'on voulait.

### Exercice 14

1. Il suffit de montrer que tout intervalle de la forme  $]a, b[$  contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels. Commençons par remarquer que :

- la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel ;
- la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

On distingue à présent deux cas :

- (a) Le réel  $a$  est rationnel. Alors la suite  $(a + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$  est une suite de nombres rationnels qui décroît vers  $a$ . L'intervalle  $]a, b[$  contient donc une infinité de valeurs de cette suite (plus précisément, toutes les valeurs telles que  $n$  soit strictement supérieur à la partie entière de  $\frac{1}{b-a}$ ). De même, la suite  $(a + \frac{\sqrt{2}}{n})_{n \geq 1}$  est une suite de nombres irrationnels qui décroît vers  $a$ , donc l'intervalle  $]a, b[$  contient une infinité de valeurs de cette suite.
- (b) Le réel  $a$  est irrationnel. Il suffit alors de montrer l'existence d'un nombre rationnel  $c$  dans l'intervalle  $]a, b[$ , puis d'appliquer le résultat précédent à l'intervalle  $]c, b[$ . Pour montrer l'existence de  $c$ , on procède comme suit : si  $b - a > 1$ , alors il existe un nombre entier strictement compris entre  $a$  et  $b$ , donc c'est gagné. Dans le cas contraire, comme  $b - a$  est strictement positif, on peut toujours choisir un entier  $q \geq 2$  tel que  $q(b - a) > 1$ . Mais alors il existe un nombre entier (que l'on note  $p$ ) strictement compris entre  $qa$  et  $qb$ . Il en résulte que

$$a < \frac{p}{q} < b$$

ce qu'on voulait.

2. En déduire que la fonction  $\delta$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de  $\mathbb{R}$ .