J. Gillibert

TD n° 7 — Relations d'équivalence

Exercice 1
Dire si chacune des relations ci-dessous est réflexive, symétrique, ou transitive.

1. La relation R sur $\mathbb{Q}$ définie par :
$$xRy \Leftrightarrow xy \neq 0$$
2. La relation T sur $\mathbb{Z}$ définie par :
$$aTb \Leftrightarrow a - b \text{ est divisible par 2 ou par 3}$$

Exercice 2
On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Étant donné un réel x, calculer sa classe d'équivalence. Combien y a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 3
On définit une relation $\sim$ sur $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$) en posant :
$$X \sim Y \Leftrightarrow X \cup [0,1] = Y \cup [0,1]$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Étant donné $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, décrire sa classe d'équivalence pour la relation $\sim$.
3. Décrire l'ensemble quotient $\mathfrak{P}(\mathbb{R})/\sim$.

Exercice 4
Soit E l'ensemble des droites du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On considère la relation $\parallel$ sur E définie par :
$$D \parallel D' \Leftrightarrow D \text{ est parallèle à } D'$$

1. Montrer que $\parallel$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Montrer que l'ensemble quotient $E/\parallel$ est en bijection avec les droites passant par l'origine.
3. Montrer que l'ensemble quotient $E/\parallel$ est en bijection avec $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Exercice 5
On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie par :

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
2. Montrer que l'ensemble quotient $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\mathcal{R}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Exercice 6
Soit $n > 0$ un entier fixé. Si a est un entier relatif, on note $\overline{a}$ la classe de a modulo n.

1. Montrer que :
$$\overline{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + n\mathbb{Z}$$
2. Montrer que :
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$
où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n.

Exercice 7
Soit $\omega > 0$ un réel fixé. Si a est un réel, on note $\overline{a}$ la classe de a modulo ω.

1. Montrer que :
$$\overline{a} = \{a + \omega k \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + \omega\mathbb{Z}$$
2. Montrer que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ est en bijection avec l'intervalle $[0, \omega[$.