Corrigé du TD n° 7

Exercice 1
Dire si chacune des relations ci-dessous est réflexive, symétrique, ou transitive.

1. La relation R sur $\mathbb{Q}$ définie par :
$$xRy \Leftrightarrow xy \neq 0$$
   (a) La relation R est-elle réflexive ? C'est-à-dire, est-il vrai que xRx pour tout $x \in \mathbb{Q}$? Ici xRx signifie $x^2 \neq 0$, ce qui est faux pour $x = 0$. Donc R n'est pas réflexive.
   (b) La relation R est-elle symétrique ? C'est-à-dire, est-il vrai que $xRy \Leftrightarrow yRx$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$? La réponse est oui, car $xy \neq 0 \Leftrightarrow yx \neq 0$.
   (c) La relation R est-elle transitive ? C'est-à-dire, étant donné trois nombres x, y et z tels que xRy et yRz, est-il vrai que xRz ? La réponse est oui. En effet, si $xy \neq 0$ alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$. De même, si $yz \neq 0$, alors $y \neq 0$ et $z \neq 0$. Il en résulte que $xz \neq 0$ puisque x et z sont non nuls.
2. La relation T sur $\mathbb{Z}$ définie par :
$$aTb \Leftrightarrow a - b \text{ est divisible par 2 ou par 3}$$
   (a) La relation T est réflexive. En effet, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ est divisible par 2 (et par 3 !).
   (b) La relation T est symétrique. En effet, si aTb est vrai, alors $a - b$ est divisible par 2 ou par 3, donc son opposé $b - a$ est lui aussi divisible par 2 ou par 3, c'est-à-dire que bTa est vrai.
   (c) La relation T n'est pas transitive. On peut donner le contre-exemple suivant : $6T3$ et $3T1$ sont vrais, mais $6T1$ est faux.

Exercice 2
On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

1. On remarque que :
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$$
   Grâce à cette nouvelle formulation, il est facile de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (ce que nous ne faisons pas ici).
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, la classe d'équivalence de x, notée $Cl(x)$, est l'ensemble
$$Cl(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid x\mathcal{R}y\}$$
   On cherche donc l'ensemble des y satisfaisant $x^2 - y^2 = x - y$. Bien sûr, $y = x$ est solution, puisque $\mathcal{R}$ est réflexive. Pour trouver les autres solutions, on peut supposer que $y \neq x$. Sachant que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, l'équation devient $(x - y)(x + y) = x - y$, d'où $x + y = 1$ en divisant les deux côtés par $x - y$. Autrement dit, $y = 1 - x$. Au final, nous avons montré que :
$$Cl(x) = \{x, 1 - x\}.$$

Exercice 3
On définit une relation $\sim$ sur $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$) en posant :
$$X \sim Y \Leftrightarrow X \cup [0, 1] = Y \cup [0, 1]$$

1. Vérifions que $\sim$ est bien une relation d'équivalence :
   (a) Réflexivité : pour toute partie X de $\mathbb{R}$, il est vrai que $X \cup [0,1] = X \cup [0,1]$, donc $X \sim X$.
   (b) Symétrie : si X et Y sont deux parties de $\mathbb{R}$, alors :
   $$X \cup [0,1] = Y \cup [0,1] \Leftrightarrow Y \cup [0,1] = X \cup [0,1]$$
   c'est-à-dire que $X \sim Y \Leftrightarrow Y \sim X$.
   (c) Transitivité : si X, Y et Z sont trois parties de $\mathbb{R}$ telles que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$, alors nous avons
   $$X \cup [0,1] = Y \cup [0,1] \quad \text{et} \quad Y \cup [0,1] = Z \cup [0,1]$$
   il en résulte que
   $$X \cup [0,1] = Z \cup [0,1]$$
   c'est-à-dire que $X \sim Z$.
2. La classe d'équivalence de X pour la relation $\sim$ est
   $$Cl(X) = \{Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \mid X \cup [0,1] = Y \cup [0,1]\}$$
   Afin de décrire plus explicitement $Cl(X)$, on fait la remarque suivante : $X \cup [0,1] = Y \cup [0,1]$ si et seulement si $X \setminus [0,1] = Y \setminus [0,1]$. À partir de là, on voit que :
   $$Cl(X) = \{(X \setminus [0,1]) \cup A \mid A \subseteq [0,1]\}$$
3. Par définition, l'ensemble quotient $\mathfrak{P}(\mathbb{R})/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim$. Pour identifier cet ensemble, on peut choisir un représentant, le plus naturel possible, dans chaque classe. Or, d'après la question précédente, la classe de X est caractérisée par $X \setminus [0,1]$, que l'on peut prendre comme représentant. Vu sous cet angle, l'ensemble quotient s'identifie à l'ensemble des parties de la forme $X \setminus [0,1]$, c'est-à-dire à l'ensemble des parties de $\mathbb{R} \setminus [0,1]$.

Exercice 4
Soit E l'ensemble des droites du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On considère la relation $\parallel$ sur E définie par :
$$D \parallel D' \Leftrightarrow D \text{ est parallèle à } D'$$

1. Vérifions que $\parallel$ est une relation d'équivalence :
   (a) Réflexivité : une droite D est bien parallèle à elle-même.
   (b) Symétrie : si D est parallèle à D', alors D' est parallèle à D.
   (c) Transitivité : si D est parallèle à D', et si D' est parallèle à D'', alors D est parallèle à D''.
2. Soit E_0 l'ensemble des droites passant par l'origine. Alors chaque classe d'équivalence pour la relation $\parallel$ contient un unique élément de E_0 : en effet, d'après le postulat d'Euclide, si l'on se donne une droite D du plan, alors il passe par un point donné (ici en l'occurence, l'origine du plan) une unique droite parallèle à D. En d'autres termes, l'application
   $$\begin{aligned} E_0 &\longrightarrow E/\parallel \\ D_0 &\longmapsto Cl(D_0) \end{aligned}$$
   est bijective, ce qu'on voulait.
3. D'après la question précédente, pour montrer que l'ensemble quotient $E/\parallel$ est en bijection avec $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, il suffit de montrer que E_0 est en bijection avec $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Pour cela, on considère l'application
   $$\begin{aligned} E_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ D_0 &\longmapsto \text{le coefficient directeur de } D_0 \end{aligned}$$
   avec la convention suivante : la droite verticale a pour coefficient directeur ∞. Il est facile de vérifier que cette application est bijective, d'où le résultat.

Exercice 5
On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie par :

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   (a) Réflexivité : soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Alors $ab = ba$ donc $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$.
   (b) Symétrie : nous avons

   $$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)$$

   (c) Transitivité : soient trois couples (a,b), (c,d) et (e,f) tels que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$, c'est-à-dire $ad = bc$ et $cf = de$. Alors il vient

   $$adf = bcf \quad \text{et} \quad bcf = bde$$

   d'où
   $$adf = bde.$$

   Comme d n'est pas nul, on en déduit que $af = be$, c'est-à-dire que $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.
2. On considère l'application

   $$\begin{aligned} q : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{R} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ Cl((a,b)) &\longmapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$

   Il faut d'abord vérifier que cette application q est bien définie, autrement dit que si (a,b) et (c,d) sont deux représentants de la même classe, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Or cette dernière condition se traduit par $ad = bc$, qui est la définition même de $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$. Autrement dit :

   $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a,b)\mathcal{R}(c,d)$$

   Ceci montre à la fois que q est bien définie, et qu'elle est injective. La surjectivité est évidente.

Exercice 6
Soit $n > 0$ un entier fixé. Si a est un entier relatif, on note $\overline{a}$ la classe de a modulo n.

1. Montrer que :
   $$\overline{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + n\mathbb{Z}$$
2. Montrer que :
   $$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$
   où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo n.

Exercice 7
Soit $\omega > 0$ un réel fixé. Si a est un réel, on note $\overline{a}$ la classe de a modulo ω.

1. Montrer que :
   $$\overline{a} = \{a + \omega k \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + \omega\mathbb{Z}$$
2. Montrer que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ est en bijection avec l'intervalle $[0, \omega[$.