TD n° 6 — Injections, surjections, bijections

Exercice 1
On considère les applications f et g définies par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto xy \qquad\qquad x \longmapsto (x, x^2)$$

1. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Les applications f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 2
On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(1-x) \end{aligned}$$

1. Calculer $f^{-1}(\{y\})$ pour tout réel y. Pourquoi la valeur $y = 1/4$ est-elle particulière ? Est-ce que f est injective ? Surjective ?
2. Trouver deux intervalles I et J, aussi grands que possible, tels que l'application $I \to J$ donnée par la même formule que f soit une bijection.

Exercice 3
Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(n) = 2n, \qquad g(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

1. Les applications f et g sont-elles bijectives ?
2. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles bijectives ?

Exercice 4
L'application $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (p, q) &\longmapsto 2^p 3^q \end{aligned}$$

est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2\lfloor x \rfloor - 1}$$

1. Expliquer pourquoi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
3. Déterminer $f(\mathbb{Z})$.

Exercice 6
L'application $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, xy) \end{aligned}$$

est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 7
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective.
3. On suppose que $g \circ f$ et g sont bijectives. Peut-on en déduire que f est bijective ?

Exercice 8
Si a et b sont deux réels, on note $f_{a,b}$ l'application

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de (a, b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.
2. Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, déterminer son application réciproque.
3. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$ alors $(a, b) = (c, d)$.
4. Interpréter le résultat précédent en termes d'injectivité d'une certaine application.