Corrigé du TD n° 6

Exercice 1
On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x,x^2) \end{aligned}$$

1. Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont données par

$$\begin{aligned} f\circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(g(x)) = f(x,x^2) = x^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g\circ f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto g(f(x,y)) = g(xy) = (xy, x^2y^2) \end{aligned}$$

2. (a) L'application f est-elle injective ? En d'autres termes, est-il possible de retrouver un couple (x, y) à partir de la donnée de son image par f, à savoir le produit xy ? La réponse est évidemment non, mais pour préciser cela il convient de fournir un exemple. On peut prendre celui-ci :
$$f(1,1) = f(2,1/2) = 1$$
ce qui montre que f n'est pas injective.

(b) L'application f est-elle surjective ? Autrement dit, est-il vrai que tout élément $t \in \mathbb{R}$ est l'image par f d'un certain couple ? Pour répondre positivement à cette question il suffit de remarquer que
$$f(1,t) = t$$
donc f est surjective.

(c) L'application g est-elle injective ? Oui, car la donnée du couple (x, x^2) permet de retrouver x. Pour répondre à la question en se servant de la définition, on se donne deux réels x et x' tels que $g(x) = g(x')$, c'est-à-dire tels que
$$(x, x^2) = (x', x'^2)$$
Alors $x = x'$ par identification. Ainsi la relation $g(x) = g(x')$ implique que $x = x'$, ce qui est la définition de l'injectivité de g.

(d) L'application g est-elle surjective ? Non, car $(1, 0)$ n'admet pas d'antécédent par g : en effet, si c'était le cas, alors on aurait trouvé un réel x tel que $(x, x^2) = (1, 0)$, c'est-à-dire tel que $x = 1$ et $x^2 = 0$, ce qui est impossible.

(e) Grâce à l'analyse réelle (théorème de la bijection), on voit que $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, en particulier elle est injective et surjective.

(f) Comme f n'est pas injective, $g \circ f$ n'est pas injective. En effet, il suffit de récupérer le même exemple que pour f :
$$g(f(1,1)) = g(f(2,1/2)) = (1,1)$$

(g) Comme g n'est pas surjective, $g\circ f$ n'est pas surjective. En effet, $(1, 0)$ n'admet pas d'antécédent par g, donc n'admet pas non plus d'antécédent par $g \circ f$.

Exercice 2
On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(1-x) \end{aligned}$$

1. Soit y un réel fixé. On souhaite déterminer $f^{-1}(\{y\})$, c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de y par la fonction f, ou encore l'ensemble des solutions x de l'équation $f(x) = y$. Or cette équation s'écrit
$$x(1-x) = y$$
c'est-à-dire
$$x^2 - x + y = 0$$
Il s'agit d'une équation de degré 2 en x, dans laquelle y est vu comme une constante. Le discriminant est $\Delta = 1 - 4y$. On distingue alors trois cas possibles :
   (a) $\Delta > 0$, c'est-à-dire $y < 1/4$. Alors l'équation a deux solutions qui sont
   $$\frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}$$
   (b) $\Delta = 0$, c'est-à-dire $y = 1/4$. Alors l'équation a une solution unique : $x = 1/2$.
   (c) $\Delta < 0$, c'est-à-dire $y > 1/4$. Alors l'équation n'admet pas de solution.

   La fonction f n'est pas injective, car les réels strictement inférieurs à $1/4$ admettent deux antécédents : par exemple $f(0) = f(1) = 0$. La fonction f n'est pas surjective, car les réels strictement supérieurs à $1/4$ n'admettent aucun antécédent. La valeur $y = 1/4$ est particulière car c'est le seul réel qui admet un unique antécédent par f.
2. On peut prendre $I =]-\infty, 1/2]$ et $J =]-\infty, 1/4]$. Alors le théorème de la bijection montre que la fonction $]-\infty, 1/2] \to]-\infty, 1/4]$ donnée par la même formule que f est une bijection.

Exercice 3
Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :

$$f(n) = 2n, \qquad g(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

1. (a) L'application f n'est pas surjective. En effet, 1 n'admet pas d'antécédent par f, car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $2n = 1$. Comme f n'est pas surjective, elle n'est pas bijective.
   (b) L'application g n'est pas injective. En effet, $g(0) = g(1) = 0$.
2. (a) L'application $f \circ g$ n'est pas injective, car g n'est pas injective. En effet, $f(g(0)) = f(g(1)) = 0$. Par conséquent, $f \circ g$ n'est pas bijective. On notera par ailleurs que $f \circ g$ n'est pas surjective, car f n'est pas surjective.
   (b) L'application $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est donnée par
   $$g(f(n)) = g(2n) = \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = \lfloor n \rfloor$$
   Or ici n est un entier naturel, donc $\lfloor n \rfloor = n$. Autrement dit, $g \circ f$ est l'application identité de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Elle est donc bijective.

Exercice 4
Soit l'application $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (p,q) &\longmapsto 2^p 3^q \end{aligned}$$

1. On se demande si h est injective. Soient (p,q) et (a,b) deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $h(p,q) = h(a,b)$, alors nous avons
$$2^p 3^q = 2^a 3^b$$
Par unicité de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers, on en déduit que $p = a$ et $q = b$.
2. On se demande si h est surjective. Par unicité de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers, il est clair que 5 ne peut pas s'écrire sous la forme 2^p3^q avec p et q entiers naturels. Donc 5 n'appartient pas à l'image de h, c'est-à-dire que h n'est pas surjective.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$f(x) = \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2\lfloor x \rfloor - 1}$$

1. Pour vérifier que l'application f est bien définie, il faut vérifier que le dénominateur $2\lfloor x \rfloor - 1$ ne s'annule jamais. Or $\lfloor x \rfloor$ est un entier relatif, donc $2\lfloor x \rfloor$ est un entier relatif pair. Il n'est donc jamais égal à 1, d'où le résultat.
   (a) Soit x un réel quelconque. Alors $\lfloor 2x \rfloor$ et $2\lfloor x \rfloor - 1$ sont des entiers relatifs. Donc leur quotient est un nombre rationnel, autrement dit $f(x)$ appartient à $\mathbb{Q}$. Or il existe des nombres réels qui sont irrationnels (par exemple $\sqrt{2}$), donc f n'est pas surjective.
   (b) L'application f n'est pas injective : en effet $f(0) = f(1/3) = 0$.
2. Soit k un entier relatif. Alors $\lfloor k \rfloor = k$ et $\lfloor 2k \rfloor = 2k$, donc
$$f(k) = \frac{2k}{2k-1}.$$
On en déduit que :
$$f(\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{2k}{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 6
L'application $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :
$$\begin{aligned} k : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x+y, xy) \end{aligned}$$

1. L'application k n'est pas injective. En effet, $k(0,1) = k(1,0)$.
2. L'application k n'est pas surjective, car $(0,1)$ n'admet pas d'antécédent par f. En effet, si $(0,1)$ avait un antécédent, alors on aurait trouvé un couple $(x,y) \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = 0$ et $xy = 1$, c'est-à-dire tel que $y = -x$ et $xy = 1$. En particulier on aurait $-x^2 = 1$, ce qui est impossible car x est un réel.

Exercice 7
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Nous allons montrer que f est injective. Soient x et x' deux éléments de E tels que
$$f(x) = f(x')$$
alors
$$g(f(x)) = g(f(x'))$$
donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$.

2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Nous allons montrer que g est surjective. Soit $y \in G$, on veut montrer que y admet un antécédent par g. On sait, par surjectivité de $g \circ f$, qu'il existe $x \in E$ tel que
$$g(f(x)) = y$$
Mais alors, $f(x)$ est un antécédent de y par g, ce qu'on voulait.
3. On suppose que $g \circ f$ et g sont bijectives. Comme g est bijective, elle admet une application réciproque $g^{-1} : G \to F$, qui est elle aussi bijective. Mais alors, l'application
$$g^{-1} \circ (g \circ f)$$
est bijective, car elle est la composée de deux bijections. D'autre part, le produit de composition étant associatif, nous avons
$$g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = \mathrm{id}_F \circ f = f$$
donc f est bijective.

Exercice 8
Si a et b sont deux réels, on note $f_{a,b}$ l'application
$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

1. Déterminer pour quelles valeurs de (a, b) la fonction $f_{a,b}$ est injective, pour quelles valeurs elle est surjective.
2. Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, déterminer son application réciproque.
3. Montrer que si $f_{a,b} = f_{c,d}$ alors $(a, b) = (c, d)$.
4. Interpréter le résultat précédent en termes d'injectivité d'une certaine application.