Corrigé du TD n° 5

Exercice 1

1. Soit f_1 l'application :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

(a) Nous avons : $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$, $f_1(-2) = 4$ et $f_1(\sqrt{2}) = 2$.

(b) Étant donné un réel a, les antécédents de a par f_1 sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = a$. D'où :

- 0 admet un unique antécédent : lui-même.
- Les antécédents de 1 sont -1 et 1,
- -2 n'admet aucun antécédent par f_1,
- Les antécédents de $\sqrt{2}$ sont $\sqrt[4]{2}$ et $-\sqrt[4]{2}$.

2. Soit f_2 l'application :

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - 3y, -4x + 6y) \end{aligned}$$

(a) Nous avons : $f_2(0, 0) = (0, 0)$, $f_2(-1, 0) = (-2, 4)$ et $f_2(1, -2) = (8, -16)$.

(b) Étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des antécédents de (a, b) par f_2 se note $f_2^{-1}(\{(a, b)\})$.

- Nous cherchons les antécédents de $(0, 0)$ par f_2. Par définition :

$$\begin{aligned} f_2^{-1}(\{(0,0)\}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0 \quad \text{et} \quad -4x + 6y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{2}{3}x\} \end{aligned}$$

Autrement dit, $f_2^{-1}(\{(0,0)\})$ est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$ dans le plan affine $\mathbb{R}^2$.

- Nous cherchons les antécédents de $(-1, 0)$ par f_2. Si (x, y) est un tel antécédent, alors :

$$2x - 3y = -1 \quad \text{et} \quad -4x + 6y = 0.$$

Sachant que $-4x + 6y = -2(2x - 3y)$, on trouve donc que $0 = 2$, ce qui est faux. Ceci montre par l'absurde que $(-1, 0)$ n'admet aucun antécédent par f_2.

- On vérifie que $f_2^{-1}(\{(1, -2)\})$ est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ dans le plan affine $\mathbb{R}^2$.

3. Soit f_3 l'application :

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y \end{aligned}$$

L'ensemble des antécédents de 0 par f_3 est

$$\begin{aligned} f_3^{-1}(\{0\}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2\} \\ &= \{(x, -x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

De même, l'ensemble des antécédents de 1 est

$$f_3^{-1}(\{1\}) = \{(x, 1 - x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

4. Soit f_4 l'application :

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x^2, x+5) \end{aligned}$$

Soit x un antécédent de $(0,0)$ par f_4. Alors $x^2 = 0$ et $x+5 = 0$, donc $x = 0$ et $x+5 = 0$, ce qui est impossible. Donc $(0,0)$ n'admet pas d'antécédent par f_4. De même, $(-1,0)$ n'admet pas d'antécédent par f_3 car l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Enfin, l'ensemble des antécédents de $(1,6)$ est

$$\begin{aligned} f_4^{-1}(\{(1,6)\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1 \quad \text{et} \quad x+5 = 6\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1 \quad \text{et} \quad x = 1\} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

Exercice 2
On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- Pour que $f \circ g$ ait un sens, il faut que l'ensemble d'arrivée de g soit égal à l'ensemble de départ de f, ce qui est bien le cas ici. L'application $f \circ g$ est donnée par

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto e^{1/x} \end{aligned}$$

- De même, l'application $g \circ f$ a bien un sens. Elle est donnée par

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1/e^x \end{aligned}$$

Exercice 3
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(\{-1,2\}) &= \{f(-1), f(2)\} = \{1,2\} \\ f([-3,-1]) &= [1,3] \\ f([-3,1]) &= [0,3] \end{aligned}$$

2. Il vient :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{4\}) &= \{-4,4\} \\ f^{-1}(\{-1\}) &= \emptyset \\ f^{-1}([-1,4]) &= [-4,4] \end{aligned}$$

Exercice 4
On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \cos(\pi x)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} g(\{0,1\}) &= \{\cos 0, \cos \pi\} = \{1,-1\} \\ g([0,1/2]) &= [0,1] \\ g(\mathbb{Z}) &= \{\cos(k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1,-1\} \\ g(2\mathbb{Z}) &= \{\cos(2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1\} \end{aligned}$$

Exercice 5
Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et A' deux parties de E.

1. Par définition de $f(A \cup A')$, il vient :

$$\begin{aligned} f(A \cup A') &= \{f(x) \mid x \in A \cup A'\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A \ \text{ ou } \ x \in A'\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A\} \cup \{f(x) \mid x \in A'\} \\ &= f(A) \cup f(A') \end{aligned}$$

2. Montrons que $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$. Soit $y \in f(A \cap A')$, alors il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$. Comme x appartient à A, $y = f(x)$ appartient à $f(A)$. De même, comme x appartient à A', y appartient à $f(A')$. Au final, y appartient à $f(A) \cap f(A')$, ce qu'on voulait.
3. Considérons l'application f_1 de l'exercice 1. Soient $A = [-1, 0]$ et $A' = [0, 1]$. Nous avons d'une part :
$$f_1(A \cap A') = f_1([-1, 0] \cap [0, 1]) = f_1(\{0\}) = \{0\}$$
et, d'autre part :
$$f_1(A) \cap f_1(A') = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$$
Ceci montre qu'en général $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$.

Exercice 6
Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soit A une partie de E. Montrons que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, donc x est l'antécédent d'un élément de $f(A)$, c'est-à-dire que x appartient à $f^{-1}(f(A))$.
2. Considérons l'application f_1 de l'exercice 1. Soit $A = [0, 2]$, alors
$$f_1^{-1}(f_1([0, 2])) = f_1^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$$
ce qui illustre bien la différence entre A et $f^{-1}(f(A))$
3. Soit B une partie de F. Montrons que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$. Mais alors, par définition de $f^{-1}(B)$, $f(x)$ appartient à B, c'est-à-dire que $y \in B$, ce qu'on voulait.
4. Considérons l'application f_1 de l'exercice 1. Soit $B = [-1, 0]$, alors
$$f_1(f_1^{-1}([-1, 0])) = f_1(\{0\}) = \{0\}$$
ce qui illustre bien la différence entre B et $f(f^{-1}(B))$.

Exercice 7
Soit E un ensemble. Si A est une partie de E on lui associe l'application $\mathbf{1}_A : E \to \{0, 1\}$ définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

L'application $\mathbf{1}_A$ est appelée fonction caractéristique de A.

1. Soient A et B deux parties de E. Il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A\cap B} &= \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \\ \mathbf{1}_{\complement_E A} &= 1 - \mathbf{1}_A \\ \mathbf{1}_{A\setminus B} &= \mathbf{1}_{A\cap\complement_E B} = \mathbf{1}_A \cdot (1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \\ \mathbf{1}_{A\cup B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \end{aligned}$$

2. Par définition
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
On vérifie facilement que :
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
et on en déduit que :
$$\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$$
3. Nous allons montrer que :
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$
Pour cela, il suffit de montrer que ces deux ensembles ont même fonction caractéristique. On calcule d'une part que :
$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} &= \mathbf{1}_{A\Delta B} + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_{A\Delta B} \cdot \mathbf{1}_C \\ &= (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C - 2 \cdot (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B) \cdot \mathbf{1}_C \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C\end{aligned}$$
et d'autre part :
$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B\Delta C} - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{B\Delta C} \\ &= \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C) - 2 \cdot \mathbf{1}_A \cdot (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2 \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - 2(\mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_C) + 4 \cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \cdot \mathbf{1}_C\end{aligned}$$
Il en résulte que :
$$\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$$
d'où le résultat.
4. Il est clair que $A\Delta A = \emptyset$, donc $A' = A$ est solution du problème.