TD n° 5 — Applications

Exercice 1

1. Soit f_1 l'application :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

   (a) Déterminer les images de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.
   (b) Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0, 1, -2, $\sqrt{2}$.

2. Soit f_2 l'application :

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (2x-3y, -4x+6y) \end{aligned}$$

   (a) Déterminer les images de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,-2)$.
   (b) Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,-2)$.

3. Soit f_3 l'application :

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2 + y \end{aligned}$$

   Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 0 et de 1.

4. Soit f_4 l'application :

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x^2, x+5) \end{aligned}$$

   Déterminer, s'ils existent, les antécédents de $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,6)$.

Exercice 2

On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Les expressions $f \circ g$ et $g \circ f$ ont-elles un sens ? Si oui, les expliciter.

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

1. Déterminer les images directes :

$$f(\{-1,2\}), \qquad f([-3,-1]), \qquad f([-3,1]).$$

2. Déterminer les images réciproques :

$$f^{-1}(\{4\}), \qquad f^{-1}(\{-1\}), \qquad f^{-1}([-1,4]).$$

Exercice 4
On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \cos(\pi x)$. Déterminer les images directes :

$$g(\{0,1\}), \qquad g([0,1/2]), \qquad g(\mathbb{Z}), \qquad g(2\mathbb{Z}),$$

où $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

Exercice 5
Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et A' deux parties de E.

1. Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
2. Montrer que $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$
3. En considérant l'application f_1 de l'exercice 1, montrer que l'inclusion précédente n'est en général pas une égalité.

Exercice 6
Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soit A une partie de E. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
2. En considérant l'application f_1 de l'exercice 1, montrer que l'inclusion précédente n'est en général pas une égalité.
3. Soit B une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
4. En considérant l'application f_1 de l'exercice 1, montrer que l'inclusion précédente n'est en général pas une égalité.

Exercice 7
Soit E un ensemble. Si A est une partie de E on lui associe l'application $\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

L'application $\mathbf{1}_A$ est appelée fonction caractéristique de A.

Soient A et B deux parties de E.

1. Exprimer en fonction de $\mathbf{1}_A$ et de $\mathbf{1}_B$ les fonctions caractéristiques de $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_E A$, $A \setminus B$.
   On appelle différence symétrique de A et B, et on note $A \Delta B$, l'ensemble défini par :
   $$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
2. Exprimer en fonction de $\mathbf{1}_A$ et de $\mathbf{1}_B$ la fonction caractéristique de $A \Delta B$.
3. Soit C une troisième partie de E. Montrer que :
   $$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$
4. Montrer qu'il existe une partie A' de E telle que $A \Delta A' = \emptyset$.