TD n° 11 — Propriétés des fonctions continues

Exercice 1
Soient f et g deux fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = g(x)$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

2. Soient f et g deux fonctions continues $D \to \mathbb{R}$. Soit $\max(f, g)$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \max(f, g) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

   Montrer que cette fonction est continue sur D.

Exercice 3

1. Montrer que l'équation $x^5 = x^2 + 2$ a au moins une solution sur $]0, 2[$.
2. Montrer que le polynôme $x^3 + 2x - 1$ a une unique racine qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
3. Montrer que l'équation $x^2(\cos x)^5 + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 4
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, +\infty[$. Démontrer, en utilisant le théorème de la bijection, que le polynôme $P(X) = X^n - \alpha$ admet une unique racine dans $]0, +\infty[$.

Exercice 5
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.

Exercice 6
Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

1. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure.
2. Atteint-elle toujours sa borne inférieure ?

Exercice 7
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

a) Montrer que $f(]0, 1[) \subseteq]0, 1[$ et que $f(]1, +\infty[) \subseteq]1, +\infty[$.

b) On se donne un réel $x_0 \in]0, 1[$. Montrer qu'on peut définir une suite (x_n) par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.

c) Montrer que (x_n) est croissante. En déduire qu'elle converge, et trouver sa limite.

Exercice 8

1. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f.
2. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.
3. Donner un exemple de fonction continue $g :]0, 1[\to]0, 1[$ qui n'admet pas de point fixe.

Exercice 9

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Si I est ouvert alors $f(I)$ est ouvert.
2. Si I est fermé alors $f(I)$ est fermé.
3. Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.
4. Si I est fermé borné, alors $f(I)$ est fermé borné.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Quelles sont les propriétés de $f^{-1} : I \to [0, +\infty[$?
3. Déterminer explicitement f^{-1}.

Exercice 11

1. Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

   Montrer que f réalise une bijection entre $[-1, +\infty[$ et son image, que l'on déterminera. Expliciter la bijection réciproque.
2. Trouver le plus grand intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction

   $$g(x) = \tan(x^3)$$

   soit injective, et réalise donc une bijection entre I et $g(I)$. Expliciter l'ensemble $g(I)$ et la fonction réciproque g^{-1}.

Exercice 12

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Déterminer l'application $f \circ f$. En déduire que f est bijective.
2. Montrer que f n'est ni monotone, ni continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right).$$

Montrer que h est constante.

Exercice 14

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$, et soit $p \geq 1$ un entier fixé. Montrer qu'il existe un réel $x_p \in [0, 1]$ tel que

$$f\left(x_p + \frac{1}{p}\right) = f(x_p).$$