

TD n° 10 — Équivalents

Exercice 1

1. Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) \neq 0$. Montrer que :

$$f(x) - f(0) \sim_0 x f'(0)$$

2. Donner un équivalent polynomial en 0 pour chacune des fonctions ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} a) \sin x & b) \cos x & c) \tan x \\ d) (1+x)^\alpha - 1 & e) \arcsin x & f) \arctan x \end{array}$$

Exercice 2

Donner des équivalents polynomiaux en 0 des fonctions suivantes :

$$a) \ln(1+x) \sin^2 x \quad b) x^2(e^x - 1) \quad c) (e^x - 1)\sqrt{1+x} - e^x + 1$$

Exercice 3

Déterminer (par composition) des équivalents simples pour les fonctions ci-dessous :

$$a) \ln(1 + \sin x) \quad \text{en } 0 \quad b) (1 + \sin x)^\alpha - 1 \quad \text{en } 0 \quad c) \ln(\tan x) \quad \text{en } \frac{\pi}{4}$$

Exercice 4

En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)^2} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{(e^x - 1)} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Exercice 5

1. Déterminer des équivalents simples en $+\infty$ pour les fonctions ci-dessous :

$$a) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad b) \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x)}$$

2. Montrer que :

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \sim_{+\infty} \ln x$$

(Indication : on pourra considérer la différence des deux fonctions).