Corrigé du TD n° 10

Exercice 1

1. Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) \neq 0$. Montrer que :

$$f(x) - f(0) \sim_0 xf'(0)$$

Réponse : Par définition, si f est dérivable en 0, alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0).$$

Si en outre $f'(0)$ n'est pas nul, alors on peut définir une fonction k en posant

$$k(x) = \frac{f(x) - f(0)}{xf'(0)} \quad \text{pour } x \neq 0, \quad \text{et} \quad k(0) = 1.$$

Alors, d'après ce qui précède, $k(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0. En outre, pour tout réel x nous avons

$$f(x) - f(0) = xf'(0) \times k(x)$$

En effet, cette égalité est vraie pour $x \neq 0$ par définition de k, et reste vraie pour $x = 0$ car dans ce cas les deux membres sont nuls. D'où le résultat par définition de l'équivalent.

2. (a) Il découle de la question 1 que $\sin x \sim_0 x$.
   (b) Comme $\cos x$ tend vers 1 quand x tend vers 0, nous avons : $\cos x \sim_0 1$.
   (c) En faisant le quotient des deux équivalents précédents, il vient : $\tan x \sim_0 x$.
   (d) La dérivée en 0 de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est égale à α, donc d'après la question 1

   $$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$$

   (e) La fonction $x \mapsto \arcsin x$ est dérivable sur $]-1, 1[$, et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En particulier, sa dérivée en 0 est 1. Il résulte alors de la question 1 que $\arcsin x \sim_0 x$.
   (f) De même, la fonction $x \mapsto \arctan x$ est dérivable en 0, de dérivée égale à 1. Donc $\arctan x \sim_0 x$.

Exercice 2

Rappelons que l'on peut multiplier les équivalents. Sachant que $\ln(1+x) \sim_0 x$ et que $\sin x \sim_0 x$, on en déduit que :

$$\ln(1+x)\sin^2 \sim_0 x^3$$

De même, comme $e^x - 1 \sim_0 x$, il vient :

$$x^2(e^x - 1) \sim_0 x^3$$

Enfin, nous avons

$$(e^x - 1)\sqrt{1+x} - e^x + 1 = (e^x - 1)(\sqrt{1+x} - 1) \sim_0 \frac{x^2}{2}$$

car $\sqrt{1+x} - 1 \sim_0 \frac{x}{2}$.

Exercice 3

a) Sachant que $\ln(1+t) \sim_0 t$, et que $\sin x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit par composition d'équivalents que
$$\ln(1+\sin x) \sim_0 \sin x$$
Par ailleurs, comme $\sin x \sim_0 x$, on en déduit par transitivité de $\sim_0$ que
$$\ln(1+\sin x) \sim_0 x$$

b) Sachant que $(1+t)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha t$, et que $\sin x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, il vient
$$(1+\sin x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha \sin x \sim_0 \alpha x$$

c) Quand x tend vers $\frac{\pi}{4}$, $\tan x$ tend vers 1. Donc par composition d'équivalents
$$\ln(\tan x) \sim_{\frac{\pi}{4}} \tan x - 1$$
D'autre part, en dérivant la fonction $\tan x$ en $\frac{\pi}{4}$, on trouve que
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$
On en déduit que $\tan x - 1$ est équivalent à $2x - \frac{\pi}{2}$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$. Au final :
$$\ln(\tan x) \sim_{\frac{\pi}{4}} 2x - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4

a) Nous avons :
$$\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)^2}$$
Or
$$\sqrt[3]{1+x} - 1 = (1+x)^{1/3} - 1 \sim_0 \frac{x}{3}$$
On en déduit que
$$\frac{(e^x - 1)^2}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)^2} \sim_0 \frac{x^2}{(\frac{x}{3})^2} \sim_0 9$$
donc la limite cherchée vaut 9.

b) Nous avons :
$$\frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{e^x - 1} = \frac{\ln(x(1+\frac{1}{x}))}{e^x - 1} = \frac{\ln(x+1)}{e^x - 1}$$
Par quotient d'équivalents, il vient :
$$\frac{\ln(x+1)}{e^x - 1} \sim_0 \frac{x}{x} \sim_0 1$$
donc la limite cherchée vaut 1.

c) Rappelons que par définition $a^b = e^{b \ln a}$. Nous avons donc :
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$
On se ramène à étudier la limite en $+\infty$ de $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Or, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, donc, par composition d'équivalents il vient
$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Exercice 5

1. (a) Il vient

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}&=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\end{aligned}$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1$ tend vers 2. On en déduit que :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\sim_{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Autre solution : Nous avons

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$$

D'autre part, sachant que $\sqrt{1+t}-1\sim_0\frac{1}{2}t$, et que $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit par composition que

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\sim_{+\infty}\frac{1}{2x}$$

Il en résulte que :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\sim_{+\infty}\sqrt{x}\times\frac{1}{2x}\sim_{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(b) Nous avons

$$\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x)}=\sqrt{\ln(x)}\left(\sqrt{\frac{\ln(x+1)}{\ln x}}-1\right)$$

Or :

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\frac{\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}=1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$$

Sanchant que $\sqrt{1+t}-1\sim_0\frac{1}{2}t$, et que $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit par composition que

$$\left(\sqrt{\frac{\ln(x+1)}{\ln x}}-1\right)\sim_{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{2\ln x}$$

Finalement, rappelons que

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{x}$$

En regroupant le tout on trouve que :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\sim_{+\infty}\sqrt{\ln(x)}\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{2\ln x}\sim_{+\infty}\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}.$$

2. Nous avons :

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln x=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Cette quantité tend vers $\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. En divisant le tout par $\ln x$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on trouve que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}-1=0$$

d'où le résultat.