Corrigé du surveillé du 25 novembre 2013

Corrigé 1

1. Nous avons :
$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = 1+\cos x$$
et cette quantité tend bien vers 2 quand x tend vers 0.
2. D'après la question précédente, nous avons
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{1-\cos x} = 1$$
c'est-à-dire que :
$$1-\cos x \sim_0 \frac{1}{2}\sin^2 x$$
Or on sait que $\sin x \sim_0 x$. On en déduit que :
$$1-\cos x \sim_0 \frac{1}{2}x^2$$
3. On sait (par limite du taux d'accroissement de $t \mapsto \sqrt[3]{1+t}$ en 0) que :
$$\sqrt[3]{1+t}-1 \sim_0 \frac{1}{3}t$$
Par composition d'équivalents, sachant que x^2 tend vers 0 quant x tend vers 0, on en déduit :
$$\sqrt[3]{1+x^2}-1 \sim_0 \frac{1}{3}x^2$$
Par quotient d'équivalents on obtient :
$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x} \sim_0 \frac{\frac{1}{3}x^2}{\frac{1}{2}x^2} \sim_0 \frac{2}{3}$$
Il en résulte que :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \frac{2}{3}.$$

Corrigé 2

a) On sait (d'après le cours) que $\sin t \sim_0 t$. Par composition et quotient d'équivalents, on en déduit que :
$$\frac{\sin^3(2x^2)}{\sin^2(5x^3)} \sim_0 \frac{(2x^2)^3}{(5x^3)^2} \sim_0 \frac{8}{25}$$
Donc cette quantité tend vers $\frac{8}{25}$ quand x tend vers 0.

b) Il vient
$$\frac{e^x-1+\sin x}{x+x^{42}} = \frac{e^x-1}{x+x^{42}} + \frac{\sin x}{x+x^{42}}$$
Sachant que $e^x-1 \sim_0 x$ et que $x+x^{42} \sim_0 x$, on en déduit que :
$$\frac{e^x-1}{x+x^{42}} \sim_0 1$$
donc cette quantité tend vers 1 quand x tend vers 0. De même, sachant que $\sin x \sim_0 x$, on en déduit que
$$\frac{\sin x}{x+x^{42}} \sim_0 1$$
En additionnant les limites obtenues, il vient :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1+\sin x}{x+x^{42}} = 2.$$

c) On souhaite étudier la limite
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sin(\pi x)}$$
Si l'on pose $x = 1-h$, alors quand x tend vers 1, h tend vers 0. On se ramène donc à étudier la quantité
$$\frac{(1-h)^2-1}{\sin(\pi(1-h))}$$
quand h tend vers 0. Sachant que $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ pour tout réel θ, cette expression se réécrit
$$\frac{h^2-2h}{\sin(\pi h)}$$
Mais on sait que $\sin(\pi h) \sim_0 \pi h$. On en déduit que
$$\frac{h^2-2h}{\sin(\pi h)} \sim_0 \frac{h^2-2h}{\pi h} \sim_0 -\frac{2}{\pi}.$$
Donc la limite cherchée est égale à $-\frac{2}{\pi}$.

d) Nous avons :
$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} - 1\right)$$
Or $\sqrt{1+t}-1$ est équivalent en 0 à $\frac{1}{2}t$, et
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = 0$$
donc, par composition d'équivalents, on trouve que
$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}$$
Pour simplifier un peu, on note que :
$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$
En regroupant le tout il vient :
$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \sim_{+\infty} \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{2}$$
donc la limite cherchée vaut $\frac{1}{2}$.

Corrigé 3

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = e^x - (x^3+x^2+x+1)$$
est continue. Elle satisfait :
$$f(0) = 0.$$
D'autre part, comme $e < 3$, on en déduit que $e^2 < 9$, donc $f(2) < 9-(8+4+1) = -4$, en particulier $f(2)$ est strictement négatif. Nous avons donc :
$$f(2) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $\alpha \in]2,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$, d'où le résultat.