

Devoir surveillé du 25 novembre 2013 — Durée : 40mn

---

Ce DS porte sur le chapitre *Continuité des fonctions réelles*. Les livres et documents sont interdits, ainsi que les téléphones portables.

**Exercice 1**

1. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2$$

2. En déduire un équivalent polynomial de  $1 - \cos x$  au voisinage de 0.

3. Déterminer la valeur de :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$$

**Exercice 2**

Les limites suivantes existent-elles ? Si oui, les déterminer. Sinon, justifier.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(2x^2)}{\sin^2(5x^3)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{x + x^{42}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sin(\pi x)}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

**Exercice 3**

Montrer que l'équation

$$e^x = x^3 + x^2 + x + 1$$

possède au moins deux solutions réelles, dont l'une est positive et l'autre est négative.