# Corrigé du devoir surveillé du 12 novembre 2013

---

**Corrigé 1**

Par définition, « $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ » signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$$

**Corrigé 2**

La fonction $f$ est continue en 0 si et seulement si ses limites à droite et à gauche en ce point sont égales à $f(0)$. Nous avons :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} a\cos x = a = f(0)$$

D'autre part :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x + b = 1 + b$$

Ainsi $f$ est continue en 0 si et seulement si $a = 1 + b$.

**Corrigé 3**

1. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$g(u_n) = n - \lfloor n \rfloor = 0$$

2. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$g(v_n) = n + \frac{1}{2} - \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}$$

3. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ tendent vers $+\infty$, mais les suites $g(u_n)$ et $g(v_n)$ convergent vers deux limites distinctes. Donc $g$ n'a pas de limite en $+\infty$.