Corrigé du devoir surveillé du 21 octobre 2013

Corrigé 1
On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + \sin y \end{aligned}$$

a) L'application f n'est pas injective. En effet :

$$f(1, 0) = 1 = f(-1, 0)$$

b) L'application f n'est pas surjective. En effet, si x et y sont deux réels, alors $x^2 \geq 0$ et $\sin y \geq -1$, donc $f(x, y) \geq -1$. Ceci montre que les réels strictement inférieurs à -1 n'admettent pas d'antécédent par f, donc que f n'est pas surjective.

Corrigé 2
Soit $E = \{3, 5, 7, 11, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers impairs. On considère la relation R sur l'ensemble E définie par :

$$pRq \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \text{ est un nombre premier.}$$

a) La relation R est réflexive : pour tout $p \in E$, $\frac{p+p}{2} = p$ est un nombre premier, donc pRp.
b) La relation R est symétrique :

$$pRq \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \text{ est un nombre premier} \Leftrightarrow \frac{q+p}{2} \text{ est un nombre premier} \Leftrightarrow qRp$$

c) La relation R n'est pas transitive. En effet, $7R3$ (car $\frac{7+3}{2} = 5$) et $3R11$ (car $\frac{3+11}{2} = 7$), mais $7R11$ est faux car

$$\frac{7+11}{2} = 9$$

qui n'est pas premier.

Corrigé 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

a) On suppose que f est injective. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, nous allons montrer l'inclusion :

$$f\left(\complement_{\mathbb{R}} A\right) \subseteq \complement_{\mathbb{R}} f(A).$$

Pour cela, on se donne un élément $x \in \complement_{\mathbb{R}} A$, et on doit montrer que $f(x)$ appartient à $\complement_{\mathbb{R}} f(A)$. Supposons par l'absurde que $f(x)$ soit un élément de $f(A)$. Alors il existe un élément $a \in A$ tel que $f(a) = f(x)$. Comme x appartient au complémentaire de A, x et a sont forcément deux éléments distincts de E. Mais ils ont la même image par f, ce qui contredit l'injectivité de f. D'où le résultat.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$, et soit $A =]-\infty, 1]$. Nous avons d'une part :

$$f\left(\complement_{\mathbb{R}} A\right) = f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$$

et d'autre part :

$$\complement_{\mathbb{R}} f(A) = \complement_{\mathbb{R}} f(]-\infty, 1]) = \complement_{\mathbb{R}} [0, +\infty[=]-\infty, 0[$$

Dans cette exemple il est clair que $f\left(\complement_{\mathbb{R}} A\right)$ n'est pas inclus dans $\complement_{\mathbb{R}} f(A)$. En fait, ces deux ensembles sont disjoints !