

Devoir surveillé du 21 octobre 2013 — Durée : 40mn

Ce DS porte sur le chapitre *Algèbre générale I*. Les livres et documents sont interdits, ainsi que les téléphones portables.

Exercice 1

On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + \sin y \end{aligned}$$

- a) L'application f est-elle injective ?
- b) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 2

Soit $E = \{3, 5, 7, 11, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers impairs. On considère la relation R sur l'ensemble E définie par :

$$pRq \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \text{ est un nombre premier.}$$

- a) La relation R est-elle réflexive ?
- b) La relation R est-elle symétrique ?
- c) La relation R est-elle transitive ?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- a) On suppose que f est injective. Montrer que, pour toute partie A de \mathbb{R} ,

$$f(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}A) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}f(A).$$

- b) Montrer, en fournissant un contre-exemple, que la propriété n'est pas vraie en général si on ne suppose pas f injective.