Corrigé du devoir surveillé du 7 octobre 2013

Corrigé 1
Voir le cours !

Corrigé 2

a) D'après les formules d'Euler, nous avons :

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

b) D'après la formule précédente, nous avons :

$$(\sin\theta)^3 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{-8i}$$

On développe avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3 &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\\ &= e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\\ &= (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}(\sin\theta)^3 &= \frac{(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{-8i}\\ &= -\frac{1}{4}(\sin 3\theta - 3\sin\theta)\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

Corrigé 3

a) On cherche les racines carrées de $-4i$, c'est-à-dire de $4e^{-i\pi/2}$. Les racines sont :

$$2e^{-i\pi/4} \quad \text{et} \quad -2e^{-i\pi/4}$$

soit, sous forme algébrique,

$$\sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

b) Pour résoudre l'équation $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$, on calcule d'abord son discriminant Δ. Il vient :

$$\Delta = (2i)^2 - 4(-1+i) = -4 + 4 - 4i = -4i$$

Les racines carrées de Δ ont été calculées à la question précédente : ce sont $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et son opposé. Au final, les solutions de l'équation de départ sont :

$$z_1 = \frac{-2i + \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2i - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

c'est-à-dire :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Corrigé 4
Nous avons :

$$(1+i)^{1000} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{1000} = \sqrt{2}^{1000}e^{1000i\pi/4}$$

Nous avons $1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3$, donc $1000/4 = 2 \times 5^3$ est pair. Il en résulte que $e^{1000i\pi/4} = 1$, d'où :

$$(1+i)^{1000} = 2^{500}.$$