Corrigé du devoir surveillé du 23 septembre 2013

Corrigé 1 (5)
La table de vérité de l'assertion $((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\neg\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})) \Rightarrow \mathbf{Q}$ s'écrit :

$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$	$\neg\mathbf{P}$	$\neg\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$	$(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\neg\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})$	$((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\neg\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})) \Rightarrow \mathbf{Q}$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1

La dernière colonne de cette table montre que l'assertion en question est toujours vraie.

Corrigé 2 (4+4)

1. Nous allons démontrer par récurrence sur n l'égalité :
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
   (a) Initialisation : pour $n = 1$ l'égalité s'écrit $1 = \frac{2^2}{4}$, ce qui est vrai.
   (b) Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire :
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
   Il vient alors :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$
   donc la propriété est vraie au rang $n+1$, ce qu'on voulait.
2. D'après la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique, nous avons
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
   Sachant cela, le résultat découle immédiatement de l'égalité précédente.

Corrigé 3 (3+4)
Soient E un ensemble, et A, B, C trois parties de E.

1. Il est clair que $A \setminus B = A \cap \complement_E B$.
2. Nous allons calculer $(A \setminus B) \setminus C$ en nous servant de l'égalité précédente. Il vient :
$$\begin{aligned}(A \setminus B) \setminus C &= \big(A \cap \complement_E B\big) \cap \complement_E C \\ &= A \cap \big(\complement_E B \cap \complement_E C\big) \\ &= A \cap \complement_E (B \cup C) && \text{(lois de De Morgan)} \\ &= A \setminus (B \cup C).\end{aligned}$$