

La quadrature du cerle par Ramanujan

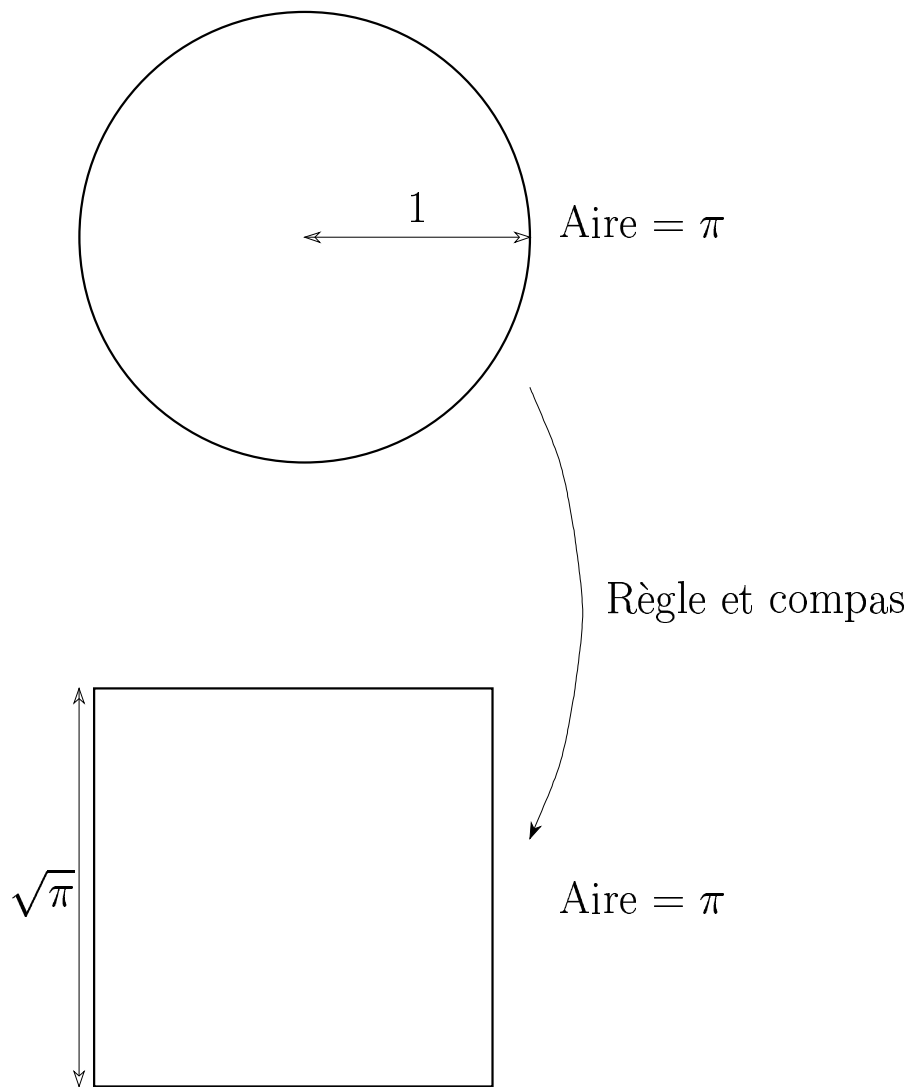
Jean-François Coulombel

Science en fête, octobre 2001



Nous montrerons comment construire, à l'aide d'une règle et d'un compas, un carré dont l'aire est à peu près égale à π (la précision est de six décimales). Cette construction a été proposée par Srinivasa Ramanujan (1887-1920) en 1913.

Le problème de la quadrature du cerle



C'est impossible !!!

Quelques valeurs approchées de π

Archimède
(287-212 avant J.C.)

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Ptolémée
(85-165 après J.C.)

$$\pi \simeq 3 + \frac{2}{15} + \frac{1}{120}$$

Adrien Métius
(1551-1635)

$$\pi \simeq \frac{355}{113}$$

6 décimales exactes

Kochansky
1685

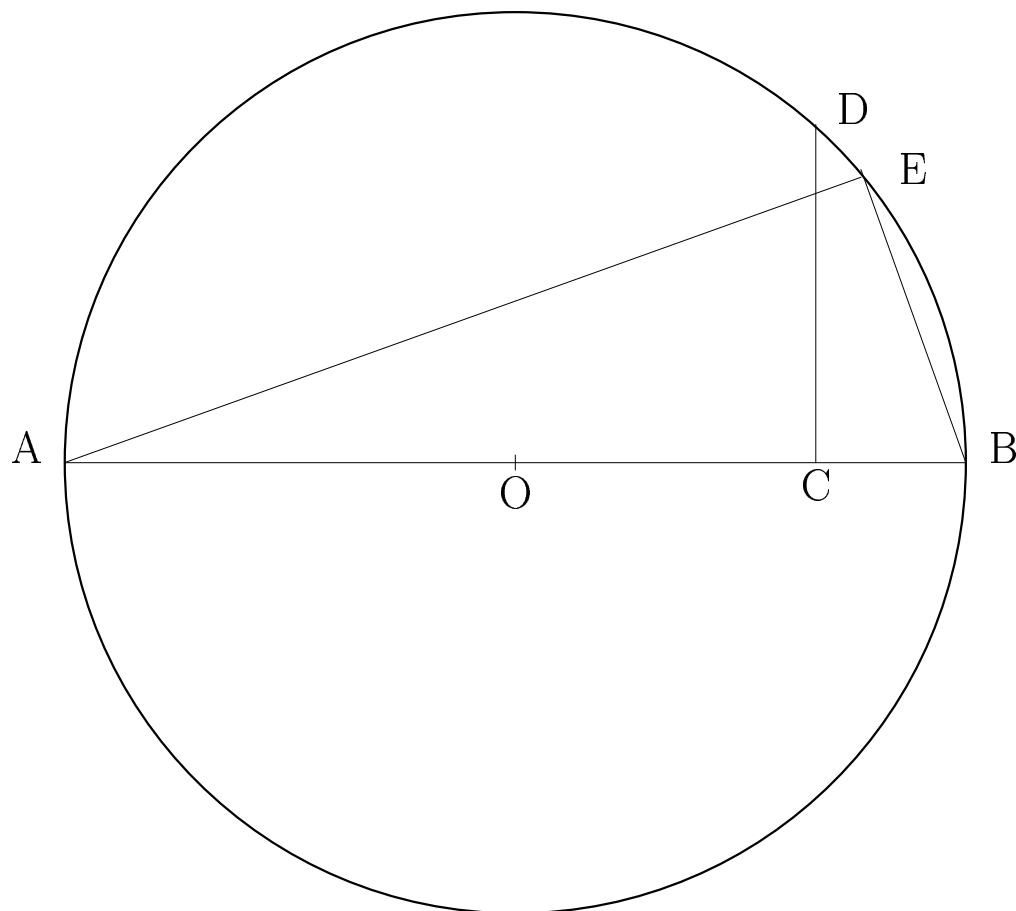
$$\pi \simeq \sqrt{4 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

Srinivasa Ramanujan
(1887-1920)

$$(9^2 + 19^2/22)^{1/4}$$

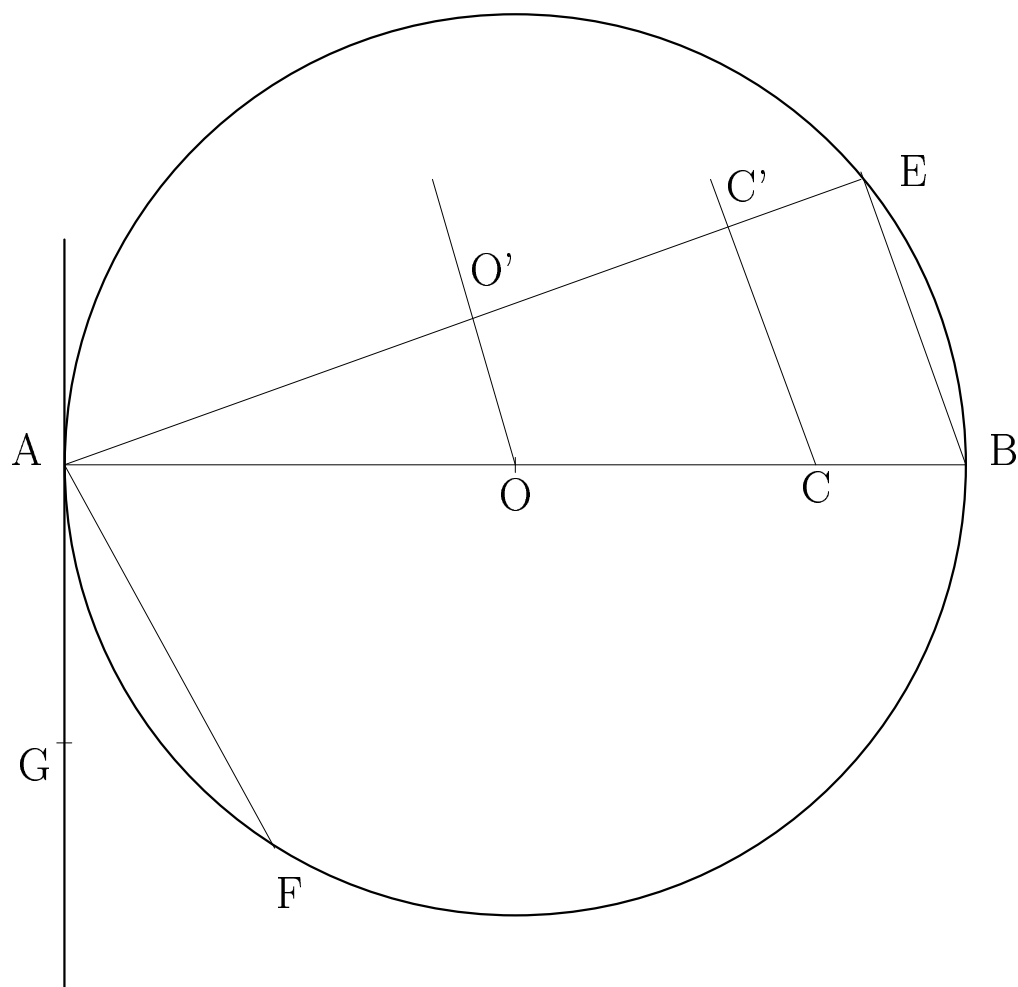
8 décimales exactes

La construction de Ramanujan



$$\begin{aligned} OC &= \frac{2}{3} OB & BE &= CD \\ \Rightarrow BE &= \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Suite...

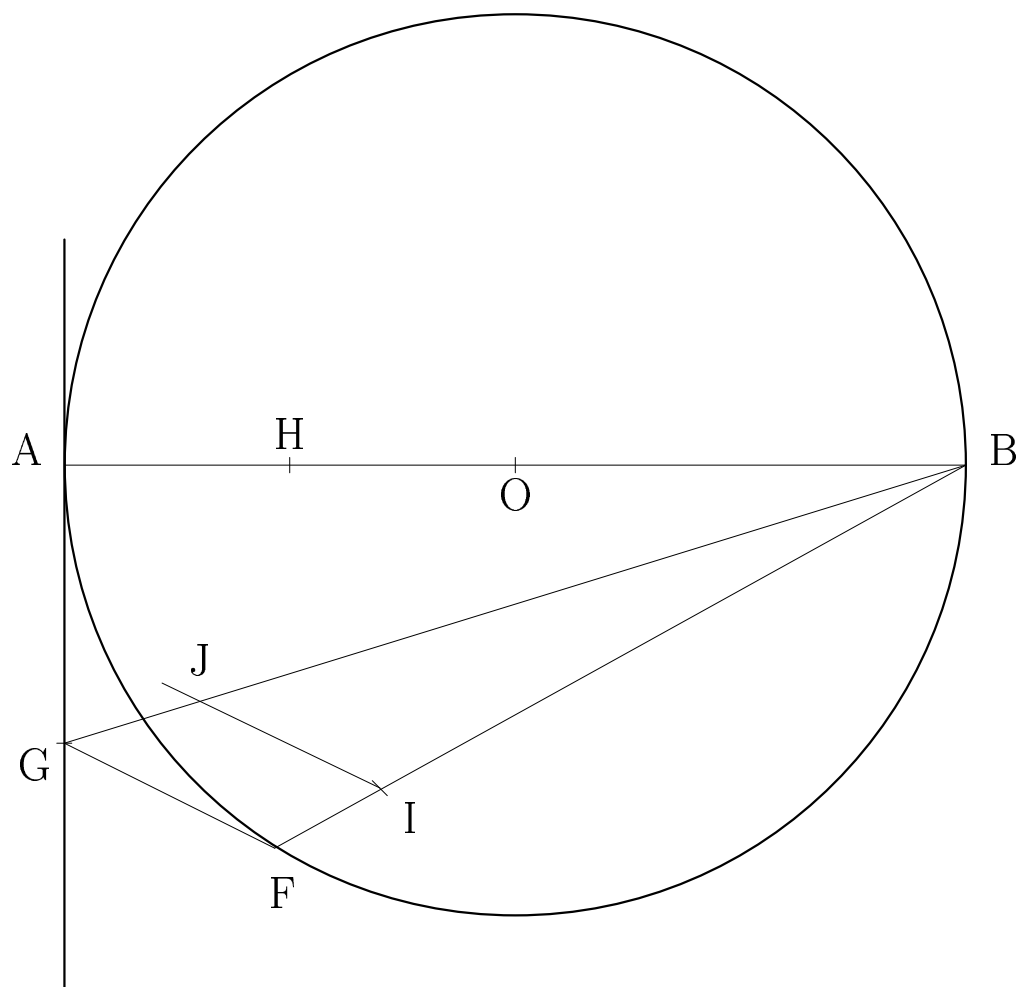


$(OO') \parallel (BE)$ et $(CC') \parallel (BE)$

$$\Rightarrow AF = AO' = \sqrt{31}/6$$

$$\Rightarrow AG = O'C' = \sqrt{31}/9$$

et fin.



$AH=HO$, $BI=BH$ et $(IJ) \parallel (FG)$

$\Rightarrow BF=\sqrt{113}/6$ et $BG=\sqrt{355}/9$

$$BJ=\sqrt{\frac{355}{113}}$$

Le calcul complet

Première figure

Par le théorème de Pythagore, on a $OC^2 + CD^2 = OD^2 = 1$
et donc on trouve bien $BE = CD = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Deuxième figure

Par le théorème de Thalès, on a $\frac{OO'}{BE} = \frac{AO}{AB} = \frac{1}{2}$
ce qui donne

$$OO' = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

Comme $[AB]$ est un diamètre du cercle, le triangle AEB est un triangle rectangle, et donc les triangles AOO' et ACC' sont aussi des triangles rectangles. Par le théorème de Pythagore, on obtient

$$AF = AO' = \sqrt{1 - \frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{31}}{6}.$$

Le théorème de Thalès donne $\frac{AO'}{O'C'} = \frac{AO}{OC} = \frac{3}{2}$
et ainsi on obtient

$$AG = O'C' = \frac{2}{3}AO' = \frac{\sqrt{31}}{9}.$$

Troisième figure

Les triangles ABG et ABF sont rectangles donc on peut leur appliquer le théorème de Pythagore. On obtient :

$$BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{4 - \frac{31}{36}} = \frac{\sqrt{113}}{6},$$
$$BG = \sqrt{AB^2 + AG^2} = \sqrt{4 + \frac{31}{81}} = \frac{\sqrt{355}}{9}.$$

Le théorème de Thalès donne

$$\frac{BJ}{BG} = \frac{BI}{BF} = \frac{BH}{BF},$$

ce qui aboutit à l'égalité

$$BJ = \frac{2}{3} \frac{BG}{BF} = \sqrt{\frac{355}{113}}.$$