

# Comment intéresser les lycéens aux mathématiques ?

Roger MANSUY

Colloque JBMU 2010

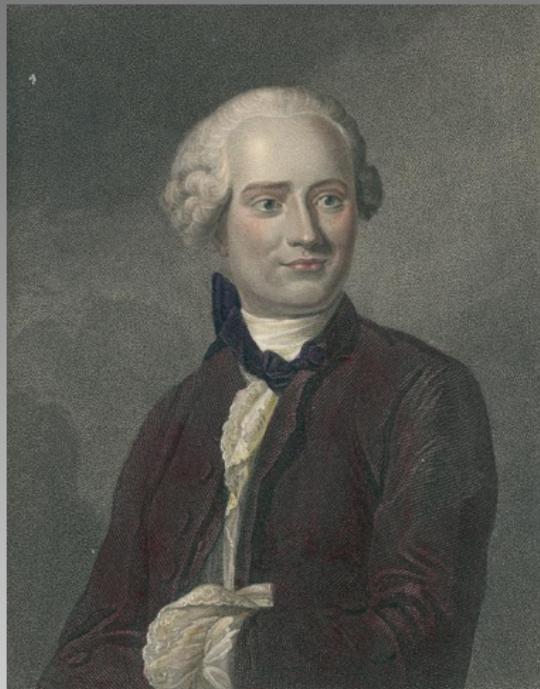
JBMU RI oMeNADIA  
du 25 au 27 octobre 2010 à l'UT de BAYONNE

Intéresser les lycéens aux mathématiques, c'est :

- ▶ les motiver pour leurs cours ?
- ▶ leur faire faire des mathématiques ?
- ▶ leur indiquer qu'il peuvent embrasser cette carrière ?
- ▶ leur montrer que les mathématiques sont importantes ?

Voici quelques exemples de démarches faites auprès de lycéens.

# L'« erreur » de D'Alembert



Jean LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)

Voici un extrait de l'Encyclopédie (tome 4, 1754) concernant le jeu de Pile ou Face.

**CROIX OU PILE, (analyse des hasards.)** Ce jeu qui est très-connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amenera *croix* en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci: Il y a quatre combinaisons,

Premier coup.	Second coup.
<i>Croix.</i>	<i>Croix.</i>
<i>Pile.</i>	<i>Croix.</i>
<i>Croix.</i>	<i>Pile.</i>
<i>Pile.</i>	<i>Pile.</i>

De ces quatre combinaisons une seule fait perdre, & trois font gagner; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il parioit en trois coups, on trouveroit huit combinaisons dont une seule fait perdre, & sept font gagner; ainsi il y auroit 7 contre 1 à parier. Voyez COMBINAISON & AVANTAGE. Cependant cela est-il bien exact? Car pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne

faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent *croix* au premier coup? Car dès qu'une fois *croix* est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles:

*Croix*, premier coup.  
*Pile*, *croix*, premier & second coup.  
*Pile*, *pile*, premier & second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même dans le cas de trois coups, on trouvera

*Croix*.  
*Pile*, *croix*.  
*Pile*, *pile*, *croix*.  
*Pile*, *pile*, *pile*.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier: ceci est digne, ce me semble, de l'attention des Calculateurs, & iroit à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard.

Ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup. Car, dès que croix est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. (...) Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.

Tous les auteurs		D'Alembert
Pile	Pile	
Pile	Croix	
Croix	Croix	
Croix	Pile	
		3/4

Ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup. Car, dès que croix est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. (...) Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.

Tous les auteurs		D'Alembert	
Pile	Pile	Pile	Pile
Pile	Croix		
Croix	Croix		
Croix	Pile		
		3/4	

Ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup. Car, dès que croix est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. (...) Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.

Tous les auteurs		D'Alembert	
Pile	Pile	Pile	Pile
Pile	Croix	Pile	Croix
Croix	Croix		
Croix	Pile		
		3/4	

Ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup. Car, dès que croix est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. (...) Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.

Tous les auteurs		D'Alembert	
Pile	Pile	Pile	Pile
Pile	Croix	Pile	Croix
Croix	Croix	}	Croix
Croix	Pile		
3/4			

Ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup. Car, dès que croix est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. (...) Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.

Tous les auteurs		D'Alembert	
Pile	Pile	Pile	Pile
Pile	Croix	Pile	Croix
Croix	Croix	}	Croix
Croix	Pile		
$3/4$		$2/3$	

Tous les auteurs		D'Alembert
Pile	Pile	Pile
Pile	Pile	Croix
Pile	Croix	Pile
Pile	Croix	Croix
Croix	Pile	Pile
Croix	Pile	Croix
Croix	Croix	Pile
Croix	Croix	Croix
7/8		

Tous les auteurs			D'Alembert		
Pile	Pile	Pile	Pile	Pile	Pile
Pile	Pile	Croix			
Pile	Croix	Pile			
Pile	Croix	Croix			
Croix	Pile	Pile			
Croix	Pile	Croix			
Croix	Croix	Pile			
Croix	Croix	Croix			
7/8					

Tous les auteurs			D'Alembert		
Pile	Pile	Pile	Pile	Pile	Pile
Pile	Pile	Croix	Pile	Pile	Croix
Pile	Croix	Pile			
Pile	Croix	Croix			
Croix	Pile	Pile			
Croix	Pile	Croix			
Croix	Croix	Pile			
Croix	Croix	Croix			
7/8					

Tous les auteurs			D'Alembert		
Pile	Pile	Pile	Pile	Pile	Pile
Pile	Pile	Croix	Pile	Pile	Croix
Pile	Croix	Pile	}	Pile	Croix
Pile	Croix	Croix			
Croix	Pile	Pile			
Croix	Pile	Croix			
Croix	Croix	Pile			
Croix	Croix	Croix			
7/8					



Tous les auteurs			D'Alembert			
Pile	Pile	Pile	Pile	Pile	Pile	
Pile	Pile	Croix	Pile	Pile	Croix	
Pile	Croix	Pile	}	Pile	Croix	
Pile	Croix	Croix				
Croix	Pile	Pile	}	Croix		
Croix	Pile	Croix				
Croix	Croix	Pile				
Croix	Croix	Croix				
7/8			3/4			

# Jeu de Penney : PPF ou FPP ?

Procédons à une séquence ininterrompue de lancers successifs d'une pièce équilibrée. En trois lancers, les résultats FPP et PPF ont la même probabilité  $1/8$ . Regardons notre série de lancers,

- ▶ si la séquence FPP sort avant la séquence PPF, je gagne ;
- ▶ si c'est l'ordre inverse, vous gagnez.

Alors, pour un tel jeu, acceptez-vous de jouer avec moi ?

▶ P,P,P, P,P,F

▶ P,P,P, P,P,F

▶ P,F,P,F, F,P,P

- ▶ P,P,P, P,P,F
- ▶ P,F,P,F, F,P,P
- ▶ F,F,F,F,F,P,F,F, F,P,P

▶ P,P,P, P,P,F

▶ P,F,P,F, F,P,P

▶ F,F,F,F,F,P,F,F, F,P,P

▶ F,P,F,F,F,P,F,F, F,P,P

- ▶ P,P,P, P,P,F
- ▶ P,F,P,F, F,P,P
- ▶ F,F,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,P

- ▶ P,P,P, P,P,F
- ▶ P,F,P,F, F,P,P
- ▶ F,F,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,P
- ▶ F,P,F,F,P,F,F, F,P,P

- ▶ P,P,P, P,P,F
- ▶ P,F,P,F, F,P,P
- ▶ F,F,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,P
- ▶ F,P,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ P, F,P,P

- ▶ P, P, P, P, P, F
- ▶ P, F, P, F, F, P, P
- ▶ F, F, F, F, F, P, F, F, F, P, P
- ▶ F, P, F, F, F, P, F, F, F, P, P
- ▶ F, P, P
- ▶ F, P, F, F, P, F, F, F, P, P
- ▶ P, F, P, P
- ▶ F, F, F, P, F, P, F, P, F, P, F,  
F, P, F, F, F, P, F, P, F, F, P,  
F, F, F, P, P

- ▶ P,P,P, P,P,F
- ▶ P,F,P,F, F,P,P
- ▶ F,F,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,F,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ F,P,P
- ▶ F,P,F,F,P,F,F, F,P,P
- ▶ P, F,P,P
- ▶ F,F,F,P,F,P,F,P,F,P,F,  
F,P,F,F,F,P,F,P,F,F,P,  
F,F, F,P,P
- ▶ F,P,P
- ▶ P,F,F,P,F,P, F,P,P
- ▶ P,P,P, P,P,F
- ▶ F,F,F,F,F,F, F,P,P
- ▶ F,P, F,P,P
- ▶ P,F,F,F,P,F,P, F,P,P

- ▶ P,P,P, **P,P,F**
- ▶ P,F,P,F, **F,P,P**
- ▶ F,F,F,F,F,P,F,F, **F,P,P**
- ▶ F,P,F,F,F,P,F,F, **F,P,P**
- ▶ **F,P,P**
- ▶ F,P,F,F,P,F,F, **F,P,P**
- ▶ P, **F,P,P**
- ▶ F,F,F,P,F,P,F,P,F,P,F,  
F,P,F,F,F,P,F,P,F,F,P,  
F,F, **F,P,P**
- ▶ **F,P,P**
- ▶ P,F,F,P,F,P, **F,P,P**
- ▶ **P,P,F**
- ▶ **F,P,P**
- ▶ P,P,P,P, **P,P,F**
- ▶ F,F,F,F,F,F, **F,P,P**
- ▶ F,P, **F,P,P**
- ▶ P,F,F,F,P,F,P, **F,P,P**

Bilan de l'expérience : **Moi** 13 - **Vous** 3.

PP

PF

FF

FP

FF

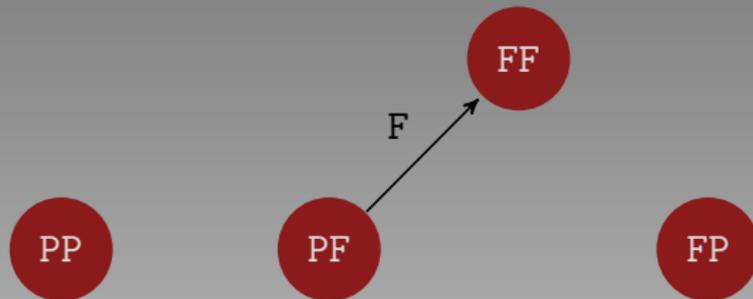
PP

PF

FP

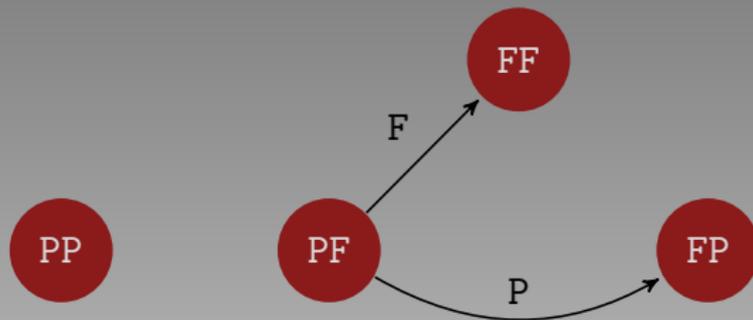
PPF, **vous gagnez**

FPP, **je gagne**



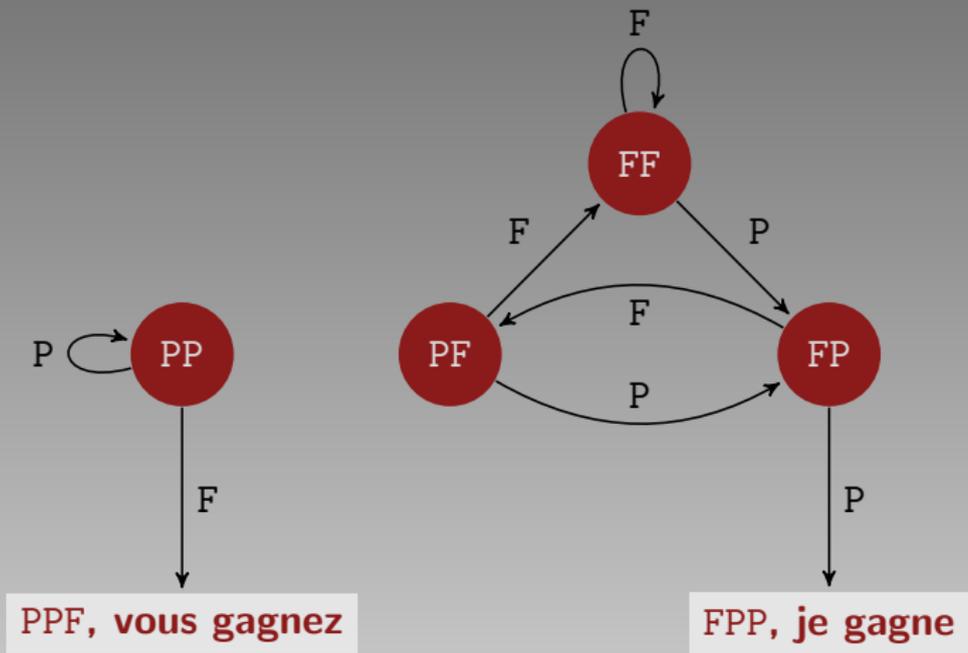
PPF, vous gagnez

FPP, je gagne



PPF, vous gagnez

FPP, je gagne



Voici quelques questions complémentaires.

- ▶ Que se passe-t-il si on décide de remplacer les mots PPF et FPP par PPPF et FPPP respectivement ?
- ▶ A-t-on le même phénomène si on décide de remplacer les mots PPF et FPP par PFP et PPF respectivement ?
- ▶ Peut-on continuer de ruiner des pauvres gens si ceux-ci essayent de nous faire jouer avec une pièce biaisée ?

# Des dés diaboliques

Voici les représentations éclatées de trois dés équilibrés.

A



B



C



Vous choisissez un dé, je prends l'un des deux autres et nous jouons ;  
qui gagne ?

Pour vous aider, voici les espérances pour le résultat d'un lancer de chacun des dés :

Dé	Espérance
A	$\simeq 9.66$
B	$\simeq 9.83$
C	9

Pour vous aider, voici les espérances pour le résultat d'un lancer de chacun des dés :

Dé	Espérance
A	$\simeq 9.66$
B	$\simeq 9.83$
C	9

Vous choisissez B ;

Pour vous aider, voici les espérances pour le résultat d'un lancer de chacun des dés :

Dé	Espérance
A	$\simeq 9.66$
B	$\simeq 9.83$
C	9

Vous choisissez B ; alors, je choisis C.

Plus généralement, voici ce que je vais décider.

Si vous choisissez le dé A, alors je choisis le dé B :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{20}{36} > \frac{1}{2}$ .

Plus généralement, voici ce que je vais décider.

Si vous choisissez le dé A, alors je choisis le dé B :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{20}{36} > \frac{1}{2}$ .

Si vous choisissez le dé B, alors je choisis le dé C :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{22}{36} > \frac{1}{2}$ .

Plus généralement, voici ce que je vais décider.

Si vous choisissez le dé A, alors je choisis le dé B :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{20}{36} > \frac{1}{2}$ .

Si vous choisissez le dé B, alors je choisis le dé C :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{22}{36} > \frac{1}{2}$ .

Si vous choisissez le dé C, alors je choisis le dé A :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{19}{36} > \frac{1}{2}$ .

Plus généralement, voici ce que je vais décider.

Si vous choisissez le dé A, alors je choisis le dé B :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{20}{36} > \frac{1}{2}$ .

Si vous choisissez le dé B, alors je choisis le dé C :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{22}{36} > \frac{1}{2}$ .

Si vous choisissez le dé C, alors je choisis le dé A :

↪ je gagne avec probabilité  $\frac{19}{36} > \frac{1}{2}$ .

$$A \ll B \ll C \ll A$$

Ces dés illustrent la non-transitivité.

# A baby chess (ITYM)



L'ITYM est une compétition internationale pour lycéens initiée par David Zmiaikou en 2008. Les principes sont simples :

# A baby chess (ITYM)



L'ITYM est une compétition internationale pour lycéens initiée par David Zmiaikou en 2008. Les principes sont simples :

- ▶ Travail par équipe pendant plusieurs semaines/mois

# A baby chess (ITYM)



L'ITYM est une compétition internationale pour lycéens initiée par David Zmiaikou en 2008. Les principes sont simples :

- ▶ Travail par équipe pendant plusieurs semaines/mois
- ▶ Problèmes ouverts ou presque, accessibles à des lycéens

# A baby chess (ITYM)



L'ITYM est une compétition internationale pour lycéens initiée par David Zmiaikou en 2008. Les principes sont simples :

- ▶ Travail par équipe pendant plusieurs semaines/mois
- ▶ Problèmes ouverts ou presque, accessibles à des lycéens
- ▶ Compétition où les élèves jouent les différents rôles du chercheur (exposé des résultats, critique des résultats, rapport objectif)

Le prix Fermat Junior 2009 a été remis à Armand Bernardi, Clément Jambou, Emmanuel Lecouturier, Sébastien Miquel, Jean Rax, Nathan Skrzypczak et Anne Kalougine, membres de l'équipe France 2 qui a remporté la première édition de l'ITYM.

Le site officiel est :

<http://www.itym.org/>

La prochaine compétition (2011) aura lieu en Biélorussie.

Voici un exemple de problème de la seconde édition (parmi ceux qui ont la formulation la moins mathématique).

A knight is placed on the square with coordinates  $(a, b)$  of an  $m \times n$  board.

Two students alternately move the knight (following the chess rules) to a square that hasn't been visited yet.  
The loser is the one who cannot make a move.

Find a winning strategy for one of the students.

# Coloriages du disque (LLGTYM)



LLGTYM est une copie du tournoi précédent à l'échelle d'un lycée.

Considérons un disque découpé en  $n$  secteurs angulaires et  $p$  anneaux.

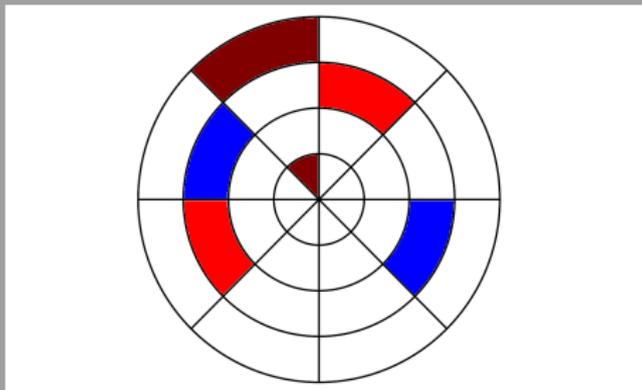
Un coloriage *intéressant* du disque est un coloriage d'une partie des  $np$  cellules tel qu'il n'y ait jamais deux cellules coloriées « symétriques »

- ▶ par rapport à un rayon,
- ▶ par rapport à un cercle,
- ▶ par rapport au centre du disque.

*Le mot symétrique est à prendre au sens intuitif.*

On fera attention au cas particulier où  $n$  est impair (il n'y a alors pas de symétrie par rapport au centre).

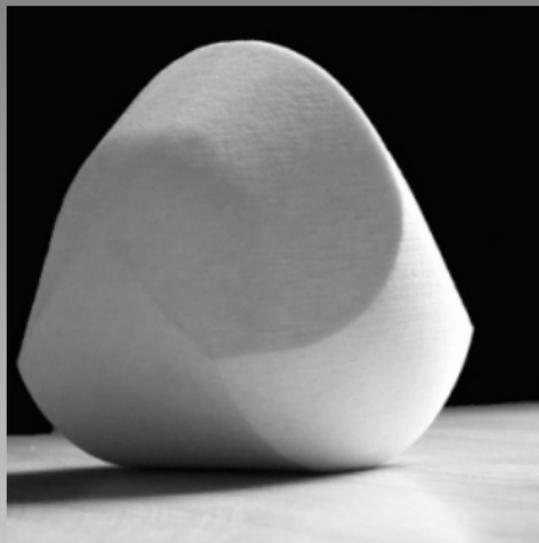
Sur la figure suivante, on a représenté des cellules symétriques par rapport à un cercle (bordeaux), à un rayon (rouge), au centre (bleu), c'est-à-dire des configurations impossibles dans un coloriage intéressant.



1. Évaluer le nombre maximal de cellules coloriées dans un coloriage intéressant du disque (par exemple, donner une borne supérieure).
2. Considérons un coloriage intéressant du disque.  
Comment pouvez-vous connaître le nombre maximal de cellules que l'on peut colorier en plus du coloriage existant sans perdre la propriété d'être intéressant ?

# Gömböc

Quel est cet objet (baptisé Gömböc) ?



d'après le site officiel <http://www.gomboc.eu/>.



Voici un indice (inhomogène) :



Le Gömböc est un corps monomonostatique (deux positions d'équilibre : une stable, une instable) homogène découvert par Gábor Domokos et Péter Várkonyi en réponse à une question de Vladimir Arnold.