Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + xe^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1. Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. **Première méthode**

a. Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.

b. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.

2. **Deuxième méthode**

a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ.

b. On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif,
$\mathscr{A}(\lambda) \leqslant -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

3. **Application numérique**

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*
On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ *alors* $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. a. On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\frac{7}{15}$.

b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
Calculer la probabilité de B.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de' jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$.
Le point M' est appelé l'image du point M.

1. a. Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_1}\right)$ et $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM_1}\right) = -\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$ à 2π près.

b. Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
Construire le point A′ image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2. a. Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

b. Soient B et C les points d'affixes respectives $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$. Calculer les affixes des points B′ et C′ images respectives des points B et C.

c. Placer les points B, C, B′ et C′ sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).

3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. a. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.

b. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p,\ q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple $(p,\ q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.

c. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2. a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$.

b. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a. Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod 7$.

b. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Baccalauréat Mathématiques Elémentaires Bordeaux 1965

Exercice

On donne le triangle ABC, dont le centre de gravité est G ; soit M un point de ce plan.

1. Exprimer
$$f(M) = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$
au moyen des longueurs MG, BC, CA, AB.
2. Quel est l'ensemble E des points M tels que $f(M) = 0$? Quels points de E appartiennent au cercle de diamètre BC ?

Problème

Soit un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$; p et q étant deux nombres complexes, on désigne par M le point de coordonnées (p, q) et on considère l'équation en z
$$z^2 - 2pz + q = 0, \qquad (1)$$
dont les racines peuvent être réelles ou complexes.
Ainsi, à tout point M est associée l'équation (1), et réciproquement.

1. Déterminer et représenter sur une même figure les ensembles A, B, C des points M tels que (1) possède :
   a) des racines complexes ;
   b) des racines réelles et distinctes ;
   c) une racine double.

   Calculer les racines dans chacun des trois cas.
2. Former l'équation de la tangente à C en son point d'abscisse c ; montrer que si, $M(p, q)$ appartient à B, l'équation (1) donne les abscisses des points de C où la tangente passe en M.

   Dans les deux question suivantes, k désigne un nombre réel positif donné, pour répondre à ses questions, on pourra examiner successivement le cas où M appartient à A où à B.
3. Déterminer l'ensemble E_k des points M tels que le module de la différence entre les racines de l'équation (1) associée à M soit inférieur à $2k$.

   Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, E_k et hachurer ce dernier.
4. Déterminer l'ensemble F_k des points M tels que les modules des racines de l'équation (1) associée à M soient, *tous deux*, inférieur à k.

   Représenter sur une figure les ensembles A, B, C, F_k et hachurer ce dernier.
5. On donne un nombre k positif ; quel est le plus grand nombre, k', tel que l'ensemble $F_{k'}$ soit inclus dans l'ensemble E_k ?

   Est-il possible de répondre en tout ou en partie à cette question sans utiliser les résultats des deux questions précédentes ?
6. On suppose que M appartient à B et l'on désigne par Γ_M le cercle qui a son centre sur la droite $x'Ox$ et qui coupe cette droite aux points dont racines sont les abscisses de l'équation (1) associée à M.

   Écrire une équation du cercle Γ_M.

   Montrer qu'un sous-ensemble de cercles Γ_M est un faisceau linéaire si, et seulement si, les points M correspondants appartiennent à une même droite, Δ non parallèle à Oy, qu'on déterminera par une équation de la forme $y = mx+h$.

   Montrer que la nature du faisceau est liée au nombre des points communs à Δ et à C ; peut-on caractériser géométriquement, lorsqu'ils existent, les points de Poncelet du faisceau ?

Baccalauréat Mathématiques Elémentaires Paris 1967

Exercice 1 :

La variable x décrivant l'intervalle $[0 ; \pi]$, étudier la variation de la fonction f définie par
$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x,$$
et construire son graphique dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
Déterminer, à l'aide d'une table, l'abscisse, en radians, du point où ce graphique coupe l'axe $x'Ox$.

Exercice 2 :

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, la position d'un point mobile M, à l'instant de date t, est défini par les relations
$$x = 1 - 3t^2 \quad \text{et} \quad y = 3t - t^3.$$
On appelle P le point où la tangente en M à la trajectoire de M rencontre la droite (D) perpendiculaire à $x'Ox$ au point M_0 de coordonnées $(+1 ; 0)$.
Trouver, à l'instant de date t, les composantes du vecteur vitesse du point M et celles du vecteur vitesse du point P.
Comparer les longueurs de ces deux vecteurs.

Problème :

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La notation $M(x ; y)$ désigne le point M d'abscisse x et d'ordonnée y.
On utilisera le point E$(1 ; 0)$ et E$'(-1 ; 0)$.

1. Étant donné un point $M(x ; y)$ du plan, on appelle M_1 son transformé dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite des ordonnées. Former la relation entre x et y qui équivaut à la nullité du produit scalaire $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{M_1E}$.

   Démontrer que l'ensemble des points M qui satisfont à cette condition est l'hyperbole équilatère $\mathscr{H}$ de sommets E et E$'$.
2. Étant donné deux points $M(x ; y)$ et $M'(x' ; y')$ de $\mathscr{H}$, distincts ou non, on définit le point $S(X ; Y)$ par :
$$\begin{cases} X = xx' + yy' \\ Y = xy' + x'y. \end{cases}$$
   On dit que S est le « produit » de M par M' et l'on note : $S = M \star M'$.

   On établira alors les propriétés suivantes :
   a) S appartient à $\mathscr{H}$;
   b) on a $M \star M' = M' \star M$;
   c) étant donné un troisième point quelconque $M''(x'' ; y'')$ de $\mathscr{H}$, on a :
$$(M \star M') \star M'' = M \star (M' \star M'').$$
   On calculera ensuite $M \star$E et l'on montrera que pour tout point $M(x ; y)$ de $\mathscr{H}$, il existe un point $\overline{M}$ de $\mathscr{H}$, que l'on précisera, tel que $M \star \overline{M}$ =E. (En résumé, le « produit » noté $\star$ muni $\mathscr{H}$ d'une structure de groupe commutatif.)
3. Étant donné deux points distincts de $\mathscr{H}$, M et M', on pose $S = M \star M'$. Vérifier que S est le point de $\mathscr{H}$ tel que les cordes ES et MM' sont parallèles.

   Que devient ce résultat quand M tend vers M' ?

   Trouver la propriété de la corde $[M, M']$ qui équivaut à S =E$'$.

   Donner une propriété équivalente faisant intervenir le produit scalaire $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{M'E}$.
4. a) Soit $[A, B]$ et $[C, D]$ deux cordes orthogonales de $\mathscr{H}$. On pose $A \star B = P$ et $C \star D = Q$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{PE}$ et $\overrightarrow{QE}$?

   En déduire que le « produit » $A \star B \star C \star D$ est égal à E$'$.

   Déduire alors du 2 que les cordes $[A, C]$ et $[B, D]$ sont orthogonales, ainsi que les cordes $[A, D]$ et $[B, C]$.

   b) Soit $[A, B]$ et $[A, C]$ deux cordes orthogonales de $\mathscr{H}$. Calculer le « produit » $A \star A \star B \star C$.

   Que peut-on dire de la tangente en A à $\mathscr{H}$?

   Démontrer que le cercle de diamètre $[B, C]$ recoupe $\mathscr{H}$ au point A' symétrique de A par rapport à O.

   c) On fixe A de $\mathscr{H}$. On considère les cordes $[A, B]$ et $[A, C]$, qui varient en restant orthogonales. Que dire de la droite (BC) ?