LES FORMULES DE TRIGONOMETRIE SANS PLEURS...

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY
Institut de mathématiques
Université PAUL SABATIER
118, route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 9, France

www.math.univ-toulouse.fr/ ˜jbhu/

RESUMÉ. Nous proposons des moyens rapides et faciles à mémoriser pour dériver les principales formules de trigonométrie.

MOTS-CLÉS. *Formules de trigonométrie. Astuces de mémorisation.*

Introduction

Ah les formules de trigonométrie ! Combien d'élèves de l'enseignement secondaire ou même d'étudiants de l'université voient avec appréhension le moment d'utiliser une formule de trigonométrie, formule dont ils se souviennent vaguement (il y a des *sinus* et des *cosinus* qui se mélangent, mais on ne sait plus où ni avec quels signes). On a l'impression -et parfois c'est une recommandation forte des enseignants- qu'il faut de toute façon les apprendre par coeur, au moins quelques unes, comme les tables de multiplication ou les règles du code de la route... Certes, des tentatives ont été faites pour donner des moyens de retenir ces formules : des moyens mnémotechniques imitant le chant du coq (*co co si co...*) ou à l'aide de jeux de cartes (comme ce fut mon cas quand j'étais adolescent, avec les trigocartes). Ce que nous proposons ici est, de par notre expérience, une des plus faciles et des plus efficaces : la méthode ne demande qu'une formule générale et des choses élémentaires sur la dérivation des fonctions *sinus* et *cosinus* (rappelées à la fin, toujours avec un moyen de les retenir). Il se passe ici quelque chose d'assez courant en mathématiques : la formule générale est plus facile à retenir que son cas particulier. Ensuite, une fois qu'on a une formule, c'est comme la pelote de laine dont a trouvé le bon fil : il suffit de tirer dessus pour dérouler le tout. Notre note aurait pu s'intituler : comment trouver le bon brin de fil pour dérouler entièrement la bobine.

1. La transformation de produits en sommes

La première formule de transformation de produits en sommes est celle-ci :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left[\cos(a+b) + \cos(a-b) \right]. \tag{1}$$

Pas question de commencer par demander de retenir cette formule... D'ailleurs je n'essaie même pas et il est probable que, avant de connaître l'astuce que je vais décrire, j'ai dû me tromper plus d'une fois en essayant de développer $\cos a \cos b$. Or, la meilleure façon de retrouver et de retenir la formule (1) est de passer par une plus générale ; la voici. Prenons n nombres réels $a_1, a_2, ..., a_n$. Que serait alors une formule exprimant le produit $\cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$ en sommes de cosinus ? Ouh la la... ça doit être compliqué... Pas du tout ! Considérons toutes les sommes ou différences possibles $\pm a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n$, c'est-à-dire en mettant un $+$ ou un $-$ devant chacun des a_i. Combien y en-a-t-il ? Réponse : 2^n, puisqu'il y a 2 signes au choix et qu'il y a n nombres réels a_i à affecter d'un signe. Et maintenant il n'y a plus qu'à prendre la moyenne de tous leurs cosinus pour obtenir $\cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$:

$$\cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon_i = +1 \ ou \ -1} \cos(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n). \tag{2}$$

Sachant que la fonction cosinus est paire, $cos(-x) = cos(x)$, on peut même réduire de moitié le nombre de termes dans la sommation au-dessus :

$$\cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\epsilon_i = +1 \ ou \ -1} \cos(a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n). \tag{2'}$$

Le cas particulier de (2) pour $n = 2$ donne

$$\cos a \cos b = \frac{1}{4} \left[\cos(a+b) + \cos(-a-b) + \cos(a-b) + \cos(-a+b)\right],$$

ou encore, en utilisant la parité de la fonction cosinus, le cas particulier de $(2')$ conduit exactement à la formule (1). Ainsi, nous avons la règle génerale que voici :

Quand il y a un produit de cosinus à développer en sommes, il n'y a que des cosinus qui apparaissent ; lesquels ? tous, et on prend leur moyenne.

Première question : Comment se démontre (2) (ou $(2')$? Réponse : Simplement, par récurrence sur n. Mais notre préoccupation ici n'est pas de proposer une démonstration simple, mais bien un moyen de retenir la structure des formules. Deuxième question, plus intéressante (pour le mathématicien du moins) : D'où vient la formule (2) ? Qu'est-ce qui se cache derrière elle ? On peut penser à l'exponentielle complexe e^{ix} dont la partie réelle est $\cos x$... mais $\cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$ n'est pas la partie réelle d'un nombre complexe facile à imaginer à partir de $e^{ia_1}, e^{ia_2} ...$ et e^{ia_n}. Autre tentative : via la géométrie et le cercle trigonométrique ; mais nous n'avons pas trouvé de moyen d'y arriver... Finalement, le salut vient du calcul des probabilités. Le raisonnement est, reconnaissons-le, d'un niveau plus avancé pour nos élèves et étudiants. Considérons donc n variables aléatoires réelles indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ de même loi de Bernoulli $P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Alors, les variables aléatoires complexes $e^{ia_1 X_1}, e^{ia_1 X_2} .., e^{ia_n X_n}$ sont indépendantes (premier résultat non trivial, mais compréhensible), de sorte que l'espérance du produit $e^{ia_1 X_1} \times e^{ia_2 X_2} .. \times e^{ia_n X_n} = e^{i(a_1 X_1 + a_2 X_2 ... + a_n X n)}$ est le produit des espérances (c'est ce résultat qui est essentiel). Ainsi, grâce à des calculs très faciles à mener, l'espérance de $e^{i(a_1X_1+a_2X_2...+a_nXn)}$ est le deuxième membre de (2), alors que l'espérance de $e^{ia_iX_k}$ est $\cos a_k$.[1]

Mais, encore une fois, ce n'est pas l'explication ni la démonstration qui nous importent ici, mais bien la simplicité de la formule à retenir. La formule (2) apparaît dans la référence [1], où elle est utilisée dans d'autres buts.

Une fois qu'on a la formule (1), comment retrouver les autres, transformant les produits en sommes ? Et là, comme dans d'autres situations de même nature, on ne pense pas assez à la *dérivation.* En effet, en pensant à a comme à une variable (sans toucher à l'autre, b), dériver les expressions de chaque membre de (1) conduit immédiatement à

$$-\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[-\sin(a+b) - \sin(a-b)\right],$$

c'est-à-dire à

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]. \tag{3}$$

Un coup de plus de dérivation, par rapport à b cette fois-ci, conduit immédiatement à

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[-\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]. \tag{4}$$

2. Formules d'addition ou de différence

Pour cette deuxième série de formules, nous adoptons la même stratégie qu'au paragraphe précédent : partir d'une formule simple à retenir (car il y a une explication sous-jacente), puis tirer le fil pour dérouler toute la bobine.

Reportons-nous à la Figure 1 ci-dessous. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour composantes $x = \cos a$ et $y = \sin a$; le vecteur $\overrightarrow{ON}$ a pour composantes $x' = \cos b$ et $y' = \sin b$. Ce sont deux vecteurs unitaires (c'est-à-dire de longueur 1). Il y a maintenant deux façons de calculer leur produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$:

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ est le produit des longueurs des vecteurs par le cosinus de leur angle, c'est-à-dire $\cos(a-b)$ ici ;

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ est évalué à l'aide des coordonnées cartésiennes des vecteurs, c'est-à-dire $xx' + yy'$, qui vaut $\cos a \cos b + \sin a \sin b$ ici.

1. L'espérance ou moyenne mathématique de $\cos(a_kX_k) + i\sin(a_kX_k)$ est

$$\frac{1}{2}\left[\cos a_k + i\sin a_k + \cos(-a_k) + i\sin(-a_k)\right] = \cos a_k.$$

De même l'espérance mathématique de $\cos(a_1X_1 + ... + a_nX_n) + i\sin(a_1X_1 + ... + a_nX_n)$ est

$$\frac{1}{2^n}\sum\left[\cos(\pm a_1 \pm ... \pm a_n) + i\sin(\pm a_1 \pm ... \pm a_n)\right] = \frac{1}{2^n}\sum\left[\cos(\pm a_1 \pm ... \pm a_n)\right].$$

Dans les deux cas, les parties imaginaires se sont "tuées entre elles". Il ne reste plus que des réels, exprimés en *cosinus*.

Ainsi

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \tag{5}$$

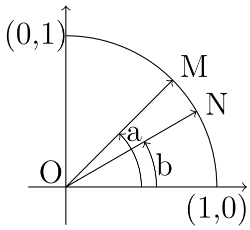


FIGURE 1 –

L'expérience nous a montré que cette manière de faire retenir la formule (5), avec l'explication du produit scalaire sous-jacente, était la plus efficace.

Ensuite, pour des formules similaires, cultivons comme au paragraphe précédent le réflexe de la dérivation. Ainsi, pensant à a comme à une variable (sans toucher à l'autre, b), dériver les expressions de chaque membre de (5) conduit immédiatement à

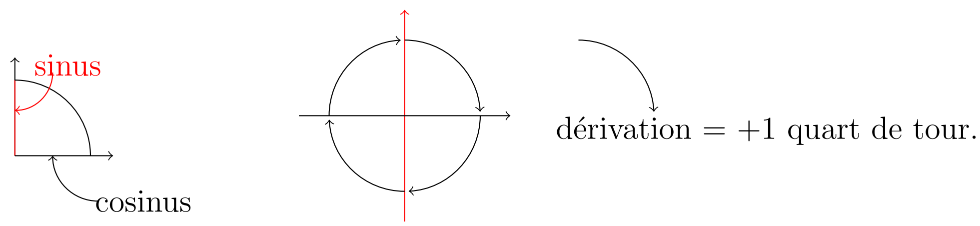
$$-\sin(a-b) = -\sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

soit encore

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \tag{6}$$

Annexe

Les propriétés des fonctions *sinus* et *cosinus* se retiennent facilement et bien si on *voit* ce qu'ils représentent sur le cercle trigonométrique. Voir Figure 2a.



(a) (b)

FIGURE 2 –

Pour la dérivation de ces fonctions, une seule règle à retenir : *la dérivation est un coup de manivelle à droite, d'un quart de tour...* La dérivée de *sinus* est *cosinus*, la dérivée de *cosinus* est $-$*sinus*, la dérivée de $-$*sinus* est $-$*cosinus*, etc. voir Figure 2b. On a bien l'expression française "démarrer au quart de tour" ; je propose donc le leitmotiv : *"dériver* *c'est démarrer au quart de tour"*. Bien entendu, pour l'opération inverse de primitivation (on dit aussi antidérivation), on remonte la manivelle (ou le temps) par un quart de tour.

Référence

D. Borwein, J.M. Borwein, A. Straub, A Sinc that Sank, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 119, N° 7 (August-September 2012), pp. 535-549.