

Rédigé à la demande de la revue **Tangente** (janvier 2016)

## Conjecturez, conjecturez... il en restera toujours quelque chose

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY  
Institut de Mathématiques  
Université PAUL SABATIER de Toulouse

E-mail : jbh@math.univ-toulouse.fr

**Conjecture...** si on ouvre un dictionnaire quelconque à ce mot, voici la définition qu'on trouve : *hypothèse formulée sur l'exactitude ou l'inexactitude d'un énoncé dont on ne connaît pas encore la démonstration*. En d'autres termes, c'est une "question ouverte" pour laquelle une affirmation a été prononcée : "*oui, je pense que cette assertion est vraie*", ou, ce qui a la même portée logique, "*non, je conjecture que cet énoncé est faux*". En mathématiques, comme dans d'autres sciences, les conjectures ont toujours joué un rôle de stimulant et de moteur. Chaque domaine des mathématiques a ses conjectures, plus ou moins connues, plus ou moins compréhensibles... "Conjecturer" est même une démarche qui est encouragée dans l'apprentissage des mathématiques, y compris dans les classes de collèges et lycées.

Quel est le destin d'une conjecture ? Deux possibilités : soit on la démontre et la conjecture devient un théorème, soit on trouve un contre-exemple et la conjecture est réfutée. Si on n'arrive ni à l'une ni à l'autre, on dit que "la conjecture tient toujours".

**Mais qu'est-ce qu'une conjecture célèbre ?** C'est, à mon sens, une affirmation qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- L'énoncé est simple, compréhensible par le plus grand nombre de mathématiciens, voire de non mathématiciens. La grande conjecture de P.FERMAT, jusqu'à sa démonstration par A.WILES et R.TAYLOR en 1994, en était un exemple parfait. Venant du pays de FERMAT, je ne pouvais pas rester sans l'évoquer.

- Avoir résisté (assez) longtemps aux assauts des mathématiciens.

- Avoir engendré de nouvelles mathématiques à travers les différentes tentatives de résolution, d'où le titre de ma note : *Conjecturez, conjecturez... il en restera toujours quelque chose*.

Les trois exemples figurant en encadré illustrent la genèse d'une conjecture et ce qu'il en advient : une conjecture simple réfutée à l'aide d'un contre-exemple ; une conjecture confirmée à l'aide d'une démonstration (ou preuve) ; une conjecture sur les nombres premiers, d'un énoncé simple, mais qui tient toujours.

L'histoire des mathématiques nous offre de nombreuses conjectures célèbres vérifiant les trois propriétés énoncées plus haut. En 1845, le mathématicien français J.BERTRAND postulait qu'entre tout entier  $n \geq 2$  et son double  $2n$ , il existe un nombre premier. A première vue, cela semble vrai ; il en existe même plusieurs en général. Ainsi, entre 6 et 12, se trouvent 7 et 11. Certes, cette conjecture fut démontrée assez rapidement (en 1852) par P.TCHEBYCHEV en utilisant habilement la formule de STIRLING. Pourtant ce qu'on

devrait nommer le *théorème de TCHEBYCHEV* est souvent appelé encore le *postulat de BERTRAND*.

Deux siècles plus tôt, P.FERMAT avait affirmé et cru avoir démontré, que les nombres de la forme  $F_n = (2)^{2^n} + 1$ , où  $n$  désigne un entier, sont tous des nombres premiers. Le mathématicien midi-pyrénéen l'avait vérifié pour  $F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$  et  $F_4 = 65537$ . En exhibant la factorisation  $641 \times 6700417$  de  $F_5 = 2^{32} + 1$ , L.EULER a réfuté la conjecture de FERMAT.

Certaines conjectures, d'apparence très simple, restent à démontrer. C'est la cas de celle de C.GOLDBACH, énoncée en 1742 dans un courrier à son ami EULER. Il affirme alors que tout nombre pair plus grand que 4 est la somme de deux nombres premiers. Ainsi,  $20 = 7 + 13, 44 = 13 + 31$ , etc. Personne jusqu'à nos jours n'est parvenu à le démontrer de manière générale, alors que la puissance des ordinateurs actuels a permis de vérifier cette assertion pour tous les nombres inférieurs à  $4 \times 10^{18}$ .

Des exemples plus élaborés figurent dans des articles récents de l'auteur : [1] [2]; documents téléchargeables à partir du site [www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/](http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/).

(en encadré)

**Un premier exemple.**

31 est un nombre premier, 331 aussi, 3331 également,... d'où la tentation de conjecturer :

$$\text{Tout nombre entier de la forme } \underbrace{3333\dots}_{n \text{ fois}} 1 \text{ est premier.} \tag{C_1}$$

Nous avons commencé par le vérifier pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ . De fait, c'est encore vrai pour  $n = 4, 5, 6, 7$ . Mais, patratas, pour  $n = 8$ , ce n'est plus vrai... En effet,

$$333333331 = 17 \times 19607843.$$

Donc, nous avons réfuté la conjecture ( $C_1$ ) en exhibant un contre-exemple.

**Un deuxième exemple.**

$\frac{1+3}{5+7} = \frac{1}{3}, \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1}{3}, \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{1}{3}, \dots$  il est donc tentant de proposer la conjecture suivante :

$$\frac{N_n}{D_n} := \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{(2n + 1) + (2n + 3) + \dots + (4n - 1)} = \frac{1}{3},$$

c'est-à dire le quotient de la somme des  $n$  premiers nombres impairs par la somme des  $n$  nombres impairs suivants, vaut toujours  $\frac{1}{3}$  (conjecture notée ( $C_2$ )). C'est effectivement le cas, nous allons le démontrer. Comme souvent pour une propriété qui dépend de l'entier  $n$ , une première idée serait de procéder à une démonstration par récurrence. C'est tout-à-fait faisable et facile ici; attention toutefois qu'en passant de  $n$  à  $n + 1$ , il y a dans  $N_{n+1}$  un terme de plus que dans  $N_n$ , mais dans  $D_{n+1}$  deux termes de plus que dans  $D_n$ . Une autre possibilité est d'utiliser la forme condensée explicite (en fonction de  $n$ ) de  $N_n$ , somme des  $n$  premiers nombres impairs. En effet,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \text{ pour tout entier } n,$$

formule que l'on peut démontrer de multiples façons, par exemple en observant que

$$\begin{aligned}
 & N_n \text{ (somme des } n \text{ premiers nombres impairs dans l'ordre croissant)} \\
 & + N_n \text{ (somme des mêmes nombres dans l'ordre décroissant)} \\
 & = [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)] \\
 & + [(2n - 1) + (2n - 3) + \dots + 5 + 3 + 1] \\
 & \quad \text{(en sommant deux par deux)} \\
 & = (2n) + (2n) + \dots + (2n) = n \times (2n).
 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\frac{N_n}{D_n} = \frac{n^2}{(2n)^2 - n^2} = \frac{1}{3}$  pour tout entier  $n$ . Nous avons donc démontré la conjecture ( $\mathcal{C}_2$ ), qui devient ainsi un théorème.

### Un troisième exemple.

Désignons par  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  la suite infinie des nombres premiers rangés par ordre croissant ; ainsi,  $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_{10} = 29$ , etc. En 1985, le mathématicien roumain D.ANDRICA conjecture ceci :

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1 \text{ pour tout entier } n. \quad (\mathcal{C}_3)$$

Comme souvent avec les conjectures sur les nombres premiers, l'énoncé est facile à comprendre mais y répondre est difficile. A ce jour, la conjecture d'ANDRICA tient toujours, c'est-à-dire qu'on n'a pas trouvé de contre-exemple (même en exploitant la puissance de calcul de plus en plus grande des ordinateurs), mais qu'on ne sait pas la démontrer non plus.

*(fin de l'encadré)*

En évoquant la démarche des scientifiques pour résoudre une conjecture célèbre, me vient à l'esprit l'image de certaines machines à sous (de jeux de fêtes foraines ou de casinos), où l'objectif est de faire tomber des pièces de monnaie à partir de présentoirs où elles sont disposées (sous verre), à l'aide de quelques mouvements autorisés (et commandés de l'extérieur de l'appareil). Lorsqu'on voit cela, la première réaction est de se dire : "*Je vois comment faire, je vais y arriver...*". Ainsi, on joue, on insiste, on s'énerve... et on abandonne. La personne qui vous suit a la même réaction que la vôtre initiale : "*Il s'y est mal pris, moi je vois comment faire...*"; à son tour, il joue en essayant autre chose, insiste, et finit par abandonner...

Cependant, plus la conjecture tient, plus elle devient célèbre et lorsqu'elle est enfin résolue, son auteur est assuré d'une grande notoriété comme ce fut le cas d'A.WILES.

### Références.

- [1] J.-B.HIRIART-URRUTY, *Le rôle des conjectures dans l'avancement des mathématiques : tours et détours à l'aide d'exemples*. Publié dans Quadrature, n° 83, 27-33 (2012).
- [2] J.-B.HIRIART-URRUTY, *Les nombres entiers : des amis qui nous posent des problèmes*. Publié dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, Vol. 176, 199-210 (2014).