A paraître dans le Bulletin de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les matrices de rotation $(3,3)$... sans jamais oser le demander

$2^{ème}$ partie : l'apport des quaternions

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [1]

Résumé.

Nous poursuivons dans cette deuxième partie l'étude des matrices orthogonales $(3,3)$ de déterminant 1, appelées encore matrices $(3,3)$ de rotation. Après en avoir obtenu différentes paramétrisations dans la première partie, nous explorons ici l'apport de ces objets mathématiques particuliers appelés quaternions. L'utilisation des quaternions permet de mieux appréhender dans la pratique la succession de rotations ; sont ainsi concernés des secteurs comme la mécanique du vol (dans des entreprises d'aéronautique comme Airbus ou Bombardier, au Centre National (français) d'Etudes Spatiales ou l'Agence Spatiale Canadienne, etc.), la robotique, l'infographie numérique, bref tout domaine où il faut modéliser, étudier et contrôler des objets en mouvement.

Introduction

Dans cet article, nous continuons la visite de l'édifice des matrices $(3,3)$ de rotation commencée en [5], en explorant deux nouvelles zones : celle des angles d'Euler (§2) et celle des quaternions de Hamilton (§3). Au préalable (§1), nous serons repassés par la partie concernant les différentes paramétrisations possibles, que nous complétons à l'occasion.

Le point central de notre étude est l'apport des quaternions, objets mathématiques qui *a priori* n'ont rien à voir avec des déplacements mécaniques comme les rotations. L'historique de cette affaire est bien détaillé chez les spécialistes de cette partie des mathématiques ([1, 3, 4, 7, 8, 9, 10]), le grand homme en étant W. R. Hamilton (1805 – 1865). Toutefois, pour garder une certaine perspective historique sur l'introduction des 4 éléments a, b, c, d des quaternions, signalons : L. Euler, presque cent ans avant, en 1748, avait énoncé un résultat sur la décomposition d'un nombre entier en 4 carrés ; B. O. Rodrigues (1795 – 1851), un autre grand homme de cette affaire, avait paramétrisé (dans un travail fondamental publié en 1840, *cf.* [9]) toutes les rotations de l'espace avec 4 éléments, et ce avant les quaternions de Hamilton. Bref, toutes ces contributions s'entremêlent. Nous ne pouvons que faire nôtre cette appréciation de [7, p. 905] :

1. Université Paul Sabatier de Toulouse
118 Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 09
Mél. jbhu@math.univ-toulouse.fr
https ://www.math.univ-toulouse.fr/˜jbhu/

"One should keep some historical perspective and remember that the succinctness and elegance of the modern approaches is only possible because they are based on a quite massive mathematical infrastructure that was built up over many years by generations of mathematicians."

"Il faut garder une certaine perspective historique et se rappeler que la concision et l'élégance des approches modernes ne sont possibles que parce qu'elles sont basées sur une infrastructure mathématique bien massive qui a été construite au fil de nombreuses années par des générations de mathématiciens."

Comme dans la $1^{ère}$ partie au même titre ([5]), le style de notre approche est volontairement pragmatique, davantage Physique-Mécanique que Mathématiques abstraites. Ainsi la matrice réelle A sera aussi bien le tableau avec m lignes et n colonnes que l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ dont la représentation matricielle est A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Dans toute la suite, on considère $\mathbb{R}^3$ euclidien muni de sa base canonique $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et orienté positivement par elle lorsque nécessaire. Notations standards utilisées : $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ pour le produit scalaire et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ pour le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$.

Plutôt que des duos du style Théorèmes-Démonstrations, nous énonçons des "Faits" : ils signifient simplement des résultats mathématiques acquis, démontrés dans les livres de cours ou d'exercices du niveau Licence des universités, dont nous ne reprenons pas les détails des preuves, à quelques exceptions près dans la partie 3.

1. Les matrices $(3, 3)$ de rotation : reprise et complétion des diverses paramétrisations

Comme annoncé dans l'introduction, on considère $\mathbb{R}^3$ euclidien muni de sa base canonique $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et orienté positivement par elle lorsque nécessaire [2]. Par commodité pour notre présentation, mais aussi pour le confort du lecteur, nous commençons par rappeler et compléter les différentes paramétrisations des matrices $(3, 3)$ de rotation, telles que présentées dans [5].

<u>Fait 1</u>. Moyennant une matrice de passage P, que l'on peut choisir orthogonale, la matrice $R' = P^{-1}RP$ $(= P^T RP)$ peut être "réduite" au format simple suivant

$$R' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Plus précisément, on a choisi pour représenter la rotation R une base orthonormée $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathbb{P} \oplus \mathbb{D}$, c'est-à-dire $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ base du plan de ro-

2. Les autres bases orthonormales (b.o.n. en abrégé chez des auteurs) sont obtenues par transformations orthogonales à partir de ce choix initial de base orthonormée. Lorsque ces transformations orthogonales sont de déterminant 1, bref des rotations, les nouvelles bases orthonormales ont même orientation que l'initiale, on les appelle parfois bases orthonormales directes (b.o.n.d. en abrégé). Description "physique" d'une b.o.n.d. $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$: Pour un observateur traversé par le vecteur $\overrightarrow{k}$ des pieds vers la tête, une rotation de $\pi/2$ de sa droite vers sa gauche amène le vecteur $\overrightarrow{i}$ sur le vecteur $\overrightarrow{j}$.

tation $\mathbb{P}$ et $\overrightarrow{v_3}$ vecteur dirigeant l'axe de rotation $\mathbb{D}$. D'une certaine manière, on "voit" dans la structure matricielle [bloc$(2,2)$ $\times$ bloc$(1,1)$] de R' la rotation dans $\mathbb{P}$ s'opérer via $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ainsi que l'axe de rotation dirigé par $\overrightarrow{v_3} = (0,0,1)$ laissé invariant.

Fait 2. Toute matrice $(3,3)$ de rotation peut être paramétrisée sous la forme suivante :

$$R = I_3 + (\sin\theta)A_1 + (1-\cos\theta)\,A_1^2, \tag{2}$$

où θ est un réel et $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice $(3,3)$ antisymétrique, avec $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ (le 1 en indice de A_1 étant là pour rappeler cette normalisation). Cette paramétrisation (2) est appelée parfois "formulation axe-angle d'EULER & RODRIGUES" de la rotation R car on y "voit" $(\cos\theta, \sin\theta)$ de l'angle θ ainsi que le vecteur unitaire (α,β,γ) dirigeant l'axe de la rotation R (dans A_1).

Désignons par $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire (α,β,γ).

Fait 3. On a :

$$\overrightarrow{u} \mapsto R\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + (\sin\theta)\ \overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u} + (1-\cos\theta)\ \overrightarrow{n}\wedge(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}). \tag{3}$$

ou encore

$$\overrightarrow{u} \mapsto R\overrightarrow{u} = (\cos\theta)\overrightarrow{u} + (\sin\theta)\ \overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u} + (1-\cos\theta)\ \langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{n}. \tag{3bis}$$

Du point de vue géométrique, $\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{n}$ est le vecteur projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur la droite $\mathbb{R}\overrightarrow{n}$, que l'on note $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{n}}$ ici. Ainsi, on peut voir (3bis) comme la décomposition de $R\overrightarrow{u}$ dans le tryptique $\{\overrightarrow{n}, \overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{n}}, \overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}\}$:

$$\overrightarrow{u} \mapsto R\overrightarrow{u} = \langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{n} + (\cos\theta)(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{n}}) + (\sin\theta)\ \overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}.$$

Des descriptions (3)-(3bis) au-dessus, on peut faire découler 2 autres paramétrisations, fondamentales, où n'apparaît plus directement le coefficient θ.

Fait 4. Quand apparaît l'angle moitié $\theta/2$... Etonnant mais très utile.

- Première écriture utilisée, en posant $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{n}\sin(\theta/2)$:

$$\overrightarrow{u} \mapsto R\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + 2\cos(\theta/2)\ \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{\omega}\wedge(\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{u}). \tag{3ter}$$

- Deuxième écriture utilisée, en posant $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{n}\tan(\theta/2)$. Cette manière de faire suppose immédiatement une limitation : θ ne peut être égal à π (à $2k\pi$ près) ; sont donc exclues les rotations d'angle π, c'est-à-dire les demi-tours.

Avec $\overrightarrow{\tau} = (\alpha\tan(\theta/2), \beta\tan(\theta/2), \gamma\tan(\theta/2))$, on note que $\|\overrightarrow{\tau}\|^2 = \tan^2(\theta/2)$. Alors, grâce à la formule du double produit vectoriel,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n}\wedge(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u}) &= \langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{n} - \|\overrightarrow{n}\|^2\,\overrightarrow{u}, \\ &= \langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{n} - \overrightarrow{u} \text{ car } \|\overrightarrow{n}\| = 1, \end{aligned}$$

et grâce aux formules trigonométriques de l'angle moitié, $\sin\theta = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}$ et $\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}$, on transforme (3) en :

$$\overrightarrow{u} \mapsto R\overrightarrow{u} = \frac{\left(1 - \|\overrightarrow{\tau}\|^2\right)\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{u} + 2\left\langle \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{\tau}}{\|\overrightarrow{\tau}\|^2 + 1}. \tag{4}$$

<u>Fait 5</u>. Grâce à (4), il est possible de décrire les rotations R, mis à part les demi-tours, sous la forme paramétrée que voici :

$$R(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 + 1}\begin{bmatrix} \tau_1^2 - \tau_2^2 - \tau_3^2 + 1 & 2(\tau_1\tau_2 - \tau_3) & 2(\tau_1\tau_3 + \tau_2) \\ 2(\tau_1\tau_2 + \tau_3) & -\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2 + 1 & 2(\tau_2\tau_3 - \tau_1) \\ 2(\tau_1\tau_3 - \tau_2) & 2(\tau_2\tau_3 + \tau_1) & -\tau_1^2 - \tau_2^2 + \tau_3^2 + 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

C'est, aux changements de signes près $(-\tau_1, -\tau_2, -\tau_3)$, la dite paramétrisation de Cayley, que nous avions obtenue d'une manière *différente* dans [5, paragraphe 3, formule (19)].

Le cas particulier où $\tau_1 = \tau_2 = 0$ et $\tau_3 = \tan(\theta/2)$ (noté t pour simplifier) donne pour R dans (5) :

$$\begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} & 0 \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme on s'y attend, inverser la matrice $R(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ revient à la transposer, ou encore à changer (τ_1, τ_2, τ_3) en $(-\tau_1, -\tau_2, -\tau_3)$.

<u>Fait 6</u>. On procède ici à un changement de paramètres différent du précédent : un vecteur tridimensionnel $\overrightarrow{n}\sin(\theta/2) = (\alpha\sin(\theta/2), \beta\sin(\theta/2), \gamma\sin(\theta/2))$ (c'est le vecteur $\overrightarrow{\omega}$ de la formule (3ter)), complété par une quatrième composante $\cos(\theta/2)$. Ici, aucune restriction sur θ, les demi-tours ($\theta = \pi$ (à $2k\pi$ près)) sont accceptés. De manière précise, voici le va-et-vient entre $((\alpha, \beta, \gamma)$ et $\theta)$ et (a, b, c, d) :

$$a = \alpha\sin(\theta/2), b = \beta\sin(\theta/2), c = \gamma\sin(\theta/2), d = \cos(\theta/2)\,; \tag{6}$$

$$\left(\theta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\right) \leftrightarrows \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\right). \tag{7}$$

Sachant que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, on vérifie facilement que a, b, c, d définis en (6) vérifient $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Dans l'autre sens, on opère en distinguant deux cas : si $d^2 < 1$, d est un $\cos(\theta/2)$ avec $\sin(\theta/2) \neq 0$ et α, β, γ suivent ; si $d^2 = 1$, les autres coefficients a, b, c sont nuls et il suffit de choisir par exemple $\theta = 0$ et (α, β, γ) quelconque vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Ainsi, moyennant quelques calculs basés sur les formules $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ et $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$, on arrive à la forme dépouillée suivante de R :

$$\left\{\begin{array}{l} R(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & -a^2 + b^2 - c^2 + d^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc + ad) & -a^2 - b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix} \\ \\ \qquad\qquad \text{où } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \end{array}\right. \tag{E-R}$$

Ce $\theta/2$ plutôt que θ interviendra à nouveau par la suite, assez systématiquement ; ceci a une explication qui sera vue plus tard, au sous-paragraphe 3.3 traitant des quaternions. Cela dit, les fonctions trigonométriques en θ ont disparu - ou sont cachées - dans les paramètres a, b, c, d.

La paramétrisation générale (E-R) d'une rotation, ainsi que les paramètres a, b, c, d, sont accompagnés du qualificatif d'Euler & Rodrigues, en hommage à deux contributeurs essentiels du domaine. C'est assez extraordinaire qu'on puisse paramétrer *toutes* les rotations de cette façon, d'autant que les fonctions de a, b, c, d apparaissant dans $R(a, b, c, d)$ sont très simples (polynomiales de degré 2). Notons qu'il n'y a pas unicité de la paramétrisation puisque $R(-a, -b, -c, -d) = R(a, b, c, d)$.

Examinons quelques cas particuliers :

- Lorsque $d^2 = 1$, auquel cas $a = b = c = 0$: la rotation en question est l'identité I_3.

- Lorsque $a^2 = 1$, auquel cas $b = c = d = 0$: la rotation en question est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, soit le demi-tour d'axe dirigé par $\overrightarrow{n} = (1, 0, 0)$. Les deux autres cas, $b^2 = 1$ ou $c^2 = 1$, sont comme au-dessus *mutatis mutandis.*

- Le cas où $d = 0$ correspond exactement au cas où $R(a, b, c, d)$ est symétrique. De fait, $R(a, b, c, 0)$ est la matrice symétrique

$$R = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $(1 - X) [X^2 - (\mathrm{tr}R - 1)X + 1] = (1 - X)(X + 1)^2$ (voir [5, Fait 9]) et ses valeurs propres sont $1, -1, -1$. Il s'agit de demi-tours dont l'axe est donné par la méthode préconisée en ([5, § 4.1]) : l'axe est dirigé par un des vecteurs-colonnes non nuls $\overrightarrow{u}$ (et il y en a forcément !) de $I_3 + R$. Ici,

$$I_3 + R = \begin{bmatrix} 2a^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}. \tag{8}$$

On peut donc prendre comme vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ dirigeant l'axe de rotation le vecteur (a, b, c).

Comme on le sait, inverser la matrice (orthogonale) $R(a, b, c, d)$ est équivalent à la transposer, ce qui revient à changer les paramètres (a, b, c, d) en $(-a, -b, -c, d)$.

Comme on l'imagine, la forme (5) peut être exprimée comme dans la forme générale (E-R) en posant :

$$\begin{cases} a = \frac{\tau_1}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2+1}}, b = \frac{\tau_2}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2+1}} \\ c = \frac{\tau_3}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2+1}}, d = \frac{1}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2+1}} \end{cases}. \tag{9}$$

Comme on l'imagine aussi, lorsque $d \neq 0$, $R(a,b,c,d)$ de (E-R) peut aussi s'écrire comme en (5) lorsqu'on aura posé $\tau_1 = \frac{a}{d}, \tau_2 = \frac{b}{d}, \tau_3 = \frac{c}{d}$.

Fait 7. Axe et cosinus/sinus de l'angle θ de la rotation paramétrée générale $R(a,b,c,d)$ de (E-R).

Pour $\cos\theta$, pas de problème puisque ce n'est autre que $\frac{1}{2}[\mathrm{tr}R(a,b,c,d) - 1]$; puisque $\mathrm{tr}R(a,b,c,d) = 3d^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 4d^2 - 1$, on a $\cos\theta = 2d^2 - 1$.

Pour la détermination simultanée de l'axe et du sinus de l'angle θ de $R(a,b,c,d)$, selon la méthode rappelée en [5, §4.2], la clé consiste à considérer la partie antisymétrique de $R(a,b,c,d)$, soit

$$S(a,b,c,d) = \frac{R(a,b,c,d) - [R(a,b,c,d)]^T}{2},$$

$$S(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} 0 & -2cd & 2bd \\ 2cd & 0 & -2ad \\ -2bd & 2ad & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Mettons de côté le cas des demi-tours (qui correspond à $d = 0$) et celui de l'identité (qui correspond à $d^2 = 1$) ; nous avons alors :

$$\begin{cases} S(a,b,c,d) = 2\sqrt{d^2(1-d^2)} \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{où } \overrightarrow{n} = (\alpha,\beta,\gamma) \text{ est un vecteur unitaire orientant l'axe de rotation,} \\ \text{et } 2\sqrt{d^2(1-d^2)} \text{ est le sinus de l'angle } \theta \text{ de rotation.} \end{cases}$$

Exemple 1. Reprenons $M_{ex1} \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ de l'Exemple 1 dans la première partie de notre travail ([5]), à savoir

$$M_{ex1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$\theta_{ex1} = \frac{\pi}{6} \text{ et } A_{1,ex1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

conviennent pour la paramétrisation axe-angle de (2). En conséquence,

$$M_{ex1} = I_3 + \frac{1}{2}A_{1,ex1} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) A_{1,ex1}^2.$$

Exemple 1 (*bis*). Toujours avec $M_{ex1} \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ de l'Exemple 1, voici, via les formules de (6) et les valeurs $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, ses paramètres a,b,c,d d'Euler & Rodrigues :

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{4},\ b = 0,\ c = \frac{\sqrt{3}-1}{4},\ d = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \tag{12}$$

2. Les fameux angles d'Euler

2.1 Rotations construites à partir des angles d'Euler

Les "angles d'EULER" font partie des sujets incontournables quand on parle de mouvements en 3D pour des changements de positions de points ou de repères de référence (*frames* en anglais). La raison, c'est-à-dire leurs points forts, est la réprésentation physique de ces angles et la visualisation du mouvement qui en résulte. En voici une présentation succincte. Je dois dire que ceux de ma génération, qui ont trimé sur des schémas dessinés à la main avec force couleurs, sont émerveillés par les animations graphiques existant sur internet et qui illustrent à l'envi ces fameux angles d'EULER. S'il ne faut en choisir qu'un exemple, voici celui vers lequel nous penchons :

"Physique et simulations numériques", adressé comme
ressources.univ-lemans.fr (> meca > angleeuler).

L'idée est de passer d'un reférentiel (fixe) $Oxyz$, marqué par un repère orthonormé direct comme d'habitude, à un nouveau référentiel $Ox_3y_3z_3$ par 3 rotations successives :

- La première est la *précession*, une dénomination qui vient de son utilisation en astronomie dans l'expression "précession des équinoxes" : c'est une rotation d'angle ψ autour de l'axe vertical Oz, dans le plan perpendiculaire à cet axe, qui fait passer de $Oxyz$ à $Ox_1y_1z_1$ (de Ox à Ox_1, de Oy à Oy_1, Oz ne bouge pas, $Oz = Oz_1$).

- La deuxième est la *nutation*, "on penche autour de Oz", dénomination qui vient de son utilisation en botanique pour signifier l'habitude qu'ont certaines plantes de pencher leurs fleurs : c'est une rotation d'angle θ autour de l'axe Ox_1, dans le plan perpendiculaire à cet axe, qui fait passer de $Ox_1y_1z_1$ à $Ox_2y_2z_2$ (de Oy_1 à Oy_2, Oz_1 à Oz_2, Ox_1 ne bouge pas, $Ox_1 = Ox_2$).

- La troisième est la *rotation propre* (ou *giration*) : c'est une rotation d'angle φ autour de l'axe Oz_2, dans un plan perpendiculaire à cet axe, qui fait passer de $Ox_2y_2z_2$ à $Ox_3y_3z_3$ (de Ox_2 à Ox_3, de Oy_2 à Oy_3, Oz_2 ne bouge pas, $Oz_2 = Oz_3$).

Jouer avec les angles (dits d'EULER) ψ, θ, φ et le point de vue de l'observateur (en 3D) dans l'animation graphique citée au-dessus est un excellent moyen de visualiser ce que sont les trois rotations de base.

Selon le format simple de la représentation matricielle d'une rotation (*cf.* Fait 1), la matrice de la précession est $R_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, celle de la nutation est $N_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, celle de la rotation propre $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Au final, la rotation composée (précession, puis nutation, puis rotation propre) est de matrice $R(\varphi, \theta, \psi) = R_\varphi N_\theta R_\psi$ (attention à l'ordre des angles dans la notation $R(\varphi, \theta, \psi)$, inverse de celui des 3 rotations effectuées !), soit après calculs :

$$R(\varphi,\theta,\psi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{bmatrix}. \tag{13}$$

En raison des propriétés des fonctions sinus et cosinus, $R(\varphi-\pi,-\theta,\psi+\pi)=R(\varphi,\theta,\psi)$. Il arrive que dans certaines applications on impose $\varphi\in[0,2\pi[$, $\psi\in[0,2\pi[$, $\theta\in[0,\pi]$.

$R(\varphi,\theta,\psi)$ est, nous le savons, une rotation ; en particulier :

$$\begin{cases}\det R(\varphi,\theta,\psi)=1,\\ [R(\varphi,\theta,\psi)]^{-1}=[R(\varphi,\theta,\psi)]^T=R(-\psi,-\theta,-\varphi).\end{cases} \tag{14}$$

Attention ici de ne pas s'emmêler les pinceaux car : dans la littérature anglo-saxonne, les notations ψ et φ pour la précession et la rotation propre sont permutées ; suivant les auteurs et/ou les domaines d'utilisation, les rotations de base ne se font pas toujours selon les trois axes que nous avons utilisés ici, parfois ce sont successivement Oz, Oy_1 et Oz_2 ; pour ce qui nous concerne, nous nous en tenons à ce qui prévaut en Mécanique-Sciences de l'ingénieur, à savoir (Oz, Ox_1 et Oz_2).

Dans le cas particulier où $\theta=0$, c'est-à-dire pas de nutation, nous avons $R(\varphi,0,\psi)$ qui est une rotation au format basique

$$R_{\psi+\varphi}=\begin{bmatrix}\cos(\psi+\varphi) & -\sin(\psi+\varphi) & 0\\ \sin(\psi+\varphi) & \cos(\psi+\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

c'est-à-dire - et cela était attendu - une rotation d'axe Oz et d'angle $\psi+\varphi$. C'est une difficulté ici car on ne distingue plus les contributions séparées de ψ et φ, on ne voit dans $R(\varphi,0,\psi)$ que la somme $\psi+\varphi$.

De même, dans le cas particulier où $\theta=\pi$, c'est-à-dire la nutation est un demi-tour d'axe Ox_1, nous avons

$$R(\varphi,\pi,\psi)=\begin{bmatrix}\cos(\psi-\varphi) & -\sin(\psi-\varphi) & 0\\ -\sin(\psi-\varphi) & -\cos(\psi-\varphi) & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

qui est un demi-tour d'axe dirigé par $\overrightarrow{n}=\left(\cos(\frac{\psi-\varphi}{2}\right),\sin(\frac{\psi-\varphi}{2}),0)$. Ici encore, on ne voit pas les contributions séparées de ψ et φ, seulement celle de la différence $\psi-\varphi$.

L'angle de la rotation finale $R(\varphi,\theta,\psi)$ sera noté α ici, car θ est habituellement réservé à celui de la nutation.

Pour avoir le cosinus de cet angle α, souvenons-nous que la trace de $R(\varphi,\theta,\psi)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}R(\varphi,\theta,\psi) &= \cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\sin\psi\\ &\quad+\cos\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\theta\\ &= \cos\theta+(1+\cos\theta)\cos(\psi+\varphi)\\ &= \cos\theta\times(1+\cos(\psi+\varphi))+\cos(\psi+\varphi),\end{aligned}$$

est $2\cos\alpha+1$; ainsi avec l'expression au-dessus obtenue de $R(\varphi,\theta,\psi)$ dans (13) et quelques calculs de trigonométrie, nous arrivons aux belles formules suivantes :

$$\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\theta - \sin^2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right); \tag{15}$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right). \tag{16}$$

Quant au vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ dirigeant l'axe de rotation (ou bien $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{n}\sin(\alpha/2)$ comme dans la formule (3ter)), les manières de procéder décrites en [5, §4] conduisent aux expressions suivantes :

$$\left\{ \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{n}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} a = \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\varphi-\psi}{2}) \\ b = \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\varphi-\psi}{2}) \\ c = \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\varphi+\psi}{2}) \end{pmatrix} \right. . \tag{17}$$

Les composantes a, b, c de $\overrightarrow{\omega}$ complétées par $d = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\varphi+\psi}{2})$ sont alors les paramètres d'Euler & Rodrigues de $R(\varphi,\theta,\psi)$, permettant ainsi une représentation (E-R) de $R(\varphi,\theta,\psi)$.

2.2 Retour d'une rotation vers des angles d'Euler

A partir d'angles ψ,θ,φ et de la construction d'Euler de rotations composées, on a abouti au sous-paragraphe précédent à la rotation $R(\varphi,\theta,\psi)$ dont on a essentiellement déterminé tous les éléments : axe, angle, paramètres d'Euler-Rodrigues. Une question qui se pose naturellement à ce stade est celle de la réciproque : *Toute rotation R est-elle nécessairement de la forme $R(\varphi,\theta,\psi)$?* La réponse est positive, voilà comment on peut procéder pour démontrer cela.

On sait - cela a été rappelé en Fait 1 - que toute matrice $(3,3)$ de rotation peut être paramétrisée sous la forme suivante :

$$R = I_3 + (\sin\alpha)A_1 + (1-\cos\alpha)\,A_1^2,$$

où α est un réel et $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{bmatrix}$, avec $u^2+v^2+w^2=1$, est une matrice $(3,3)$ antisymétrique. L'objectif est donc de trouver ψ,θ,φ tels que

$$R(\varphi,\theta,\psi) = I_3 + (\sin\alpha)A_1 + (1-\cos\alpha)\,A_1^2. \tag{18}$$

Cela se fait - un peu casse-pieds, reconnaissons-le - en examinant les 9 relations scalaires contenues dans (18). Pour donner l'élan initial, voyons ce que suggère l'égalité des coefficients $m_{3,3}$ des matrices $M = [m_{i,j}]$ figurant dans (18). On devrait avoir

$$\cos\theta = w^2 + (1-w^2)\cos\alpha. \tag{19}$$

Comme $1 - w^2 \geqslant 0$, le maximum dans le membre de droite de (19) est 1, tandis que le minimum est $2w^2 - 1 \geqslant -1$. Il existe donc θ (que l'on peut prendre dans $[0, \pi]$ même) tel que l'égalité (19) soit vérifiée.

Il est bon ensuite d'examiner à part des cas particuliers, comme celui où w^2 pourrait être égal à 1 (auquel cas u et v sont nécessairement nuls) ou celui où $\cos\alpha = 1$. Dans ces deux cas, suivant (19), $\cos\theta$ doit être égal à 1, et $\theta = 0$ convient ; ensuite, c'est $\psi + \varphi$ qui est déterminé ($\psi + \varphi = \alpha$ dans le premier cas, $\psi + \varphi = 0$ dans le deuxième), mais ψ et φ ne sont pas déterminés de manière séparée. Et on continue pour les autres cas..., voir par exemple les pages $185 - 186$ de l'ouvrage [6]. L'important est de savoir qu'étant donné α et A_1, l'équation (18), traduisant le "retour de R vers des angles d'Euler" *a effectivement des solutions* ψ, θ, φ.

Cela dit et démontré, il n'est pas toujours facile de trouver des angles ψ, θ, φ d'Euler d'une rotation qu'on nous donne.

En pratique, on peut aussi procéder de l'une des deux manières suivantes, suivant l'information dont on dispose sur la matrice de rotation $R = [r_{i,j}]$:

- "Ajuster" les coefficients de la matrice $R(\varphi, \theta, \psi)$ recherchée (voir (13)) à ceux $r_{i,j}$ de R. Commencer par exemple par $r_{3,3}$ qui donne $\cos\theta$.

- Utiliser les relations (17) avec paramètres a, b, c, d d'Euler & Rodrigues, s'ils ont été déterminés par ailleurs.

Voyons un exemple de calcul effectif des angles ψ, θ, φ.

Exemple 2. Considérons la matrice de rotation suivante

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Un premier ajustement " $0 = \cos\theta$ " conduit à $\theta = \frac{\pi}{2}$ par exemple. Avec $\sin\theta = 1$, un ajustement avec les coefficients $r_{1,3}$ et $r_{3,1}$ donne directement $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On choisit $\psi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Les autres ajustements avec les coefficients $r_{i,j}$ étant en accord en termes de signes, nous avons déterminé un jeu d'angles d'Euler $(\varphi, \theta, \psi) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ pour lequel $R = R(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.

Pour terminer ce paragraphe sur les angles d'Euler, signalons deux points faibles. Le premier est qu'il n'est pas simple de déterminer les angles d'Euler d'une rotation qui est composée de 2 rotations données $R(\varphi_1, \theta_1, \psi_1)$ et $R(\varphi_2, \theta_2, \psi_2)$. Le deuxième - et c'est vraiment son talon d'Achille - est le dit "blocage de cardan" (*gimbal lock* en anglais). Rassurez-vous, il n'y a rien qui se bloque, mais c'est ce qu'en mathématiques nous appellerions une singularité, c'est la perte d'un degré de liberté dans certaines situations (2 degrés de liberté au lieu de 3). Ces choses sont bien expliquées du point de vue Mécanique sur Wikipedia (site en français *blocage de cardan*, ou bien site en anglais *gimbal lock*) et illustrées par des vidéos sur Youtube. Changer de systèmes d'angles d'Euler, comme la possibilité en a été signalée au début, n'améliore rien dans cette affaire, une singularité existe quelque part. Cette difficulté disparaitra précisément avec les quaternions que nous abordons ci-dessous.

3. En route vers les quaternions

Les quaternions... Que viennent faire ces objets mathématiques un peu particuliers dans l'étude des matrices $(3,3)$ de rotation ? D'une manière assez inattendue, ils s'avèrent non seulement utiles mais parviennent même à supplanter les angles d'EULER dans des applications pratiques qui s'appuyent sur la mécanique du vol (avions, fusées, satellites, etc.).

3.1 Introduction succincte

Nous présentons ici, à propos des quaternions, l'essentiel de ce qui est indispensable à l'étude des matrices $(3,3)$ de rotation.

Dans le vocable “quaternions”, on sent bien qu'il y a la racine “quatre”. Effectivement, un quaternion est défini à partir de 4 paramètres réels a, b, c, d sous le format suivant :

$$Q = \underbrace{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}} + d, \tag{20}$$

où $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont des éléments particuliers obéissant aux règles de multiplication résumées dans le tableau suivant ($*$ symbolise ici la multiplication) :

$*$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

(21)

Rien de plus facile que de retenir ces règles. Il suffit de penser au produit vectoriel de deux vecteurs (distincts) pris parmi $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, éléments d'une base orthonormée directe de l'espace $\mathbb{R}^3$, avec la règle physico-mathématique habituelle dite “des trois doigts de la main droite” ; rappelons, par exemple, que $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$, etc. Quant il s'agit d'un élément multiplié par lui-même, penser au nombre complexe $\mathbf{i}$ pour lequel $\mathbf{i}^2 = -1$. Ces ressemblances ne sont pas fortuites, mais inutile d'en dire plus.

Dans l'expression (20) du quaternion Q, il y a deux parties distinctes[3] :

$$\begin{cases} a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} : \text{partie dite } \textit{vectorielle}, \text{ ou } \textit{imaginaire pure}, \text{ de } Q\,; \\ d, \text{ coefficient réel (seul) à part : partie dite } \textit{scalaire} \text{ ou } \textit{réelle} \text{ de } Q. \end{cases}$$

Nous dirons que le quaternion Q est *scalaire* lorsqu'il est égal à sa partie scalaire ($Q = d$), et qu'il est *imaginaire pur* ou *vectoriel* lorsqu'il se réduit à sa partie vectorielle ($a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$). Dans l'écriture (20), Q apparaît comme un prolongement du vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ par un degré de liberté supplémentaire, symbolisé par le réel d. Ainsi, il nous arrivera d'écrire le

3. Nous avons préféré cette expression qui fait apparaître un quaternion comme une extention d'un vecteur par un scalaire ; beaucoup d'auteurs utilisent la décomposition “scalaire puis vecteur” : $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$; c'est juste une question de notations.

quaternion $Q = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k} + d$ sous le format $(\overrightarrow{q}, d) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$, où le premier élément est le vecteur $\overrightarrow{q} = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ et le deuxième est le scalaire $d \in \mathbb{R}$:

$$Q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + d = (\overrightarrow{q}, d)\,. \tag{22}$$

L'idée et l'objectif sous-jacents sont de pouvoir manipuler les vecteurs $\overrightarrow{q} = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de quaternions dont la partie vectorielle est $\overrightarrow{q}$ [4].

La ressemblance des quaternions avec les nombres complexes est frappante, et pas fortuite non plus. D'ailleurs, pour avoir un nombre complexe, il suffit de considérer un quaternion Q avec $b = c = 0$.

L'ensemble des quaternions est noté $\mathbb{H}$, en hommage au mathématicien irlandais W. R. Hamilton (1805 − 1865) qui les introduisit, d'ailleurs pour tout à fait autre chose que l'utilisation que nous en faisons ici. En bref,

$$\mathbb{H} = \{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \ + d : a, b, c, d \text{ nombres réels}\}\,. \tag{23}$$

Ainsi, $\mathbb{H}$ apparaît comme une "sur-couche" de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Ce faisant, qu'a-t-on gagné, qu'a-t-on perdu ? A vrai dire, on étend les propriétés établies dans $\mathbb{C}$ (addition, multiplication des éléments, structure vectorielle et algébrique de l'ensemble), mais on perd une chose fondamentale : la commutativité de la multiplication $*$ (exactement comme dans le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$) [5].

Les premières propriétés des opérations dans $\mathbb{H}$ sont faciles à établir :

- *Addition* de deux quaternions : pas de problème, on additionne terme à terme les 4 réels intervenant dans la description (20) :

$$\begin{aligned} & (a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}+d_1) + (a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} + d_2) \\ = \ & (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} + (c_1 + c_2)\mathbf{k} + (d_1 + d_2). \end{aligned}$$

Autre manière de dire la même chose avec le format (22) :

$$(\overrightarrow{q_1}, d_1) + (\overrightarrow{q_2}, d_2) = (\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2}, d_1 + d_2)\,.$$

- *Multiplication par un scalaire réel* : pas de difficulté non plus, on multiplie terme à terme :

$$\lambda(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + d) = (\lambda a)\mathbf{i} + (\lambda b)\mathbf{j} + (\lambda c)\mathbf{k}+ \lambda d.$$

Muni de ces deux premières opérations, $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 (il y a bien 4 degrés de liberté a, b, c, d), copie de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (partie vectorielle à 3 degrés de liberté + partie scalaire).

---

4. L'écriture $Q = \overrightarrow{q} + d$, utilisée par certains auteurs, est abusive (on n'additionne pas un vecteur et un scalaire) et, surtout, génératrice de confusions et d'erreurs dans les calculs.

5. C'était un peu la même chose en passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$: on étend l'ensemble des réels en préservant une structure de corps, mais on perd la propriété de "corps ordonné" (qu'a $\mathbb{R}$ mais pas $\mathbb{C}$).

On peut aller au-delà des quaternions avec les dits *octonions*, mais cette généralisation fait perdre l'associativité de la nouvelle multiplication introduite.

- *Produit scalaire* de deux quaternions : on procède comme s'il s'agissait de deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\langle a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} + d_1, a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} + d_2\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2\,;$$

$$\langle(\overrightarrow{q_1}, d_1)\,, (\overrightarrow{q_2}, d_2)\rangle = \langle\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}\rangle + d_1d_2.$$

- *Multiplication*, symbolisée par $*$ (de HAMILTON) de deux quaternions : voici une nouveauté et une particularité, non pas par la difficulté de la multiplication (car il n'y en a pas), mais par le mélange occasionné par cette opération sur les coefficients des quaternions. Les ingrédients de base sont la table de multiplication présentée en (21) et les règles de calcul habituelles sur les nombres réels. En conséquence, via des calculs très simples,

$$\begin{aligned}
&(a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} + d_1) * (a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} + d_2) \text{ résulte en}\\
&+(a_1d_2 + d_1a_2 - c_1b_2 + b_1c_2)\mathbf{i}\\
&+(b_1d_2 + d_1b_2 - a_1c_2 + c_1a_2)\mathbf{j}\\
&+(c_1d_2 + d_1c_2 - b_1a_2 + a_1b_2)\mathbf{k}\\
&+d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2).
\end{aligned}$$

Quelques observations immédiates ou, du moins, faciles à vérifier, sur cette opération de multiplication :

- Elle n'est pas commutative (chose déjà observée sur les éléments de base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) ; toutefois, $Q * d = d * Q$ lorsque Q est un quaternion général et d un quaternion scalaire. De manière évidente, le quaternion scalaire 1 est élément neutre pour cette multiplication.

- $Q_1 * Q_2$ n'est pas un quaternion vectoriel même lorsque Q_1 et Q_2 sont des quaternions vectoriels (voir (25) plus bas). Une écriture du produit de deux quaternions, avec le format alternatif (22) des quaternions, est comme suit : Si $Q_1 = (\overrightarrow{q}_1, d_1)$ et $Q_2 = (\overrightarrow{q}_2, d_2)$, alors

$$Q_1 * Q_2 = (d_1\overrightarrow{q}_2 + d_2\overrightarrow{q}_1 + \overrightarrow{q}_1 \wedge \overrightarrow{q}_2, d_1d_2 - \langle\overrightarrow{q}_1, \overrightarrow{q}_2\rangle)\,. \tag{24}$$

En particulier, le produit de deux quaternions vectoriels $Q_1 = (\overrightarrow{q}_1, 0)$ et $Q_2 = (\overrightarrow{q}_2, 0)$ est

$$(\overrightarrow{q}_1, 0) * (\overrightarrow{q}_2, 0) = (\overrightarrow{q}_1 \wedge \overrightarrow{q}_2, -\ \langle\overrightarrow{q}_1, \overrightarrow{q}_2\rangle)\,. \tag{25}$$

Retenons de ceci que si Q_1 (resp. Q_2) est le quaternion vectoriel associé au vecteur $\overrightarrow{q}_1$ de $\mathbb{R}^3$ (resp. au vecteur $\overrightarrow{q}_2$ de $\mathbb{R}^3$), il est possible de récupérer le produit scalaire comme le produit vectoriel de $\overrightarrow{q}_1$ et $\overrightarrow{q}_2$ à l'aide d'opérations de base sur Q_1 et Q_2 ; voici comment :

$$\begin{cases} \overrightarrow{q}_1 \wedge \overrightarrow{q}_2 \text{ est la partie vectorielle de } Q_1 * Q_2\,; \\ -\ \langle\overrightarrow{q}_1, \overrightarrow{q}_2\rangle \text{ est la partie réelle de } Q_1 * Q_2. \end{cases} \tag{25bis}$$

Ce résumé remarquable de deux opérations basiques de l'Algèbre linéaire ou de l'Analyse vectorielle (produit scalaire et produit vectoriel) ne doit pas nous faire oublier que ces notions ont été développées *après* les quaternions...

- La multiplication $*$ est associative, $(Q_1 * Q_2) * Q_3 = Q_1 * (Q_2 * Q_3)$, d'où la notation sans ambiguïté $Q_1 * Q_2 * Q_3$, et elle se comporte bien avec l'addition (propriété dite de *distributivité*) :

$$\begin{aligned} Q_1 * (Q_2 + Q_3) &= Q_1 * Q_2 + Q_1 * Q_3\,; \\ (Q_1 + Q_2) * Q_3 &= Q_1 * Q_3 + Q_2 * Q_3. \end{aligned}$$

- *Conjugué* d'un quaternion. Ici, comme dans les deux items suivants, il faut suivre avec le schéma des nombres complexes en tête.

Si $Q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + d$, le quaternion conjugué de Q est $\overline{Q} = -a\mathbf{i} - b\mathbf{j} - c\mathbf{k} + d$. Ou bien, si l'on préfère, on passe de $Q = (\overrightarrow{q}, d)$ à $\overline{Q} = (-\overrightarrow{q}, d)$.

Propriétés :

$\dfrac{Q+\overline{Q}}{2}$ est le quaternion scalaire d, partie scalaire de Q (et de $\overline{Q}$) ;

$\dfrac{Q-\overline{Q}}{2}$ est le quaternion vectoriel $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, partie vectorielle de Q ;

$$\overline{Q_1 * Q_2} = \overline{Q_2} * \overline{Q_1}.$$

Ceci n'est guère plus long à démontrer ; attention toutefois à l'ordre inversé (écueil qui n'existait pas avec les nombres complexes).

- *Norme* (ou longueur) d'un quaternion. Si $Q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + d$, on constate que $Q * \overline{Q} = \overline{Q} * Q$ est le quaternion scalaire $(a^2 + b^2 + c^2) + d^2$, c'est-à-dire le carré de la norme euclidienne de $((a, b, c), d) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. On appelle norme de Q et on note $|Q|$ la quantité $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Un quaternion Q est dit *unitaire* lorsque $|Q| = 1$, c'est-à-dire, de fait, lorsque $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Voici une propriété de multiplicativité de $|.|$, dont la démonstration n'est pas difficile avec ce qui a été présenté plus haut :

$$|Q_1 * Q_2| = |Q_1| \times |Q_2|\,. \tag{26}$$

Elle n'a l'air de rien mais cette propriété (26), écrite avec les carrés, se traduit par

$$\begin{aligned} & (a_1d_2 + d_1a_2 - c_1b_2 + b_1c_2)^2 + (b_1d_2 + d_1b_2 - a_1c_2 + c_1a_2)^2 + \\ & (c_1d_2 + d_1c_2 - b_1a_2 + a_1b_2)^2 + (d_1d_2 - a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2)^2 \\ = \; & (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) \times (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2), \end{aligned}$$

qui contient un certain nombre d'identités remarquables ; cette relation était connue de L. Euler (encore lui !) qui s'en était servi pour démontrer que si deux entiers sont sommes de 4 carrés d'entiers, leur produit l'était aussi.

- *Inverse* d'un quaternion.

Si $Q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + d$ est un quaternion non nul, c'est-à-dire si l'un des coefficients a, b, c, d n'est pas nul, soit encore si $|Q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, alors on définit l'inverse Q^{-1} de Q comme étant le quaternion

$$Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{|Q|^2} = \frac{-a\mathbf{i} - b\mathbf{j} - c\mathbf{k} + d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \tag{27}$$

C'est du "copié-collé" de l'inversion de nombres complexes (si $0 \neq z \in \mathbb{C}$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$) ; on évitera toutefois la notation $\frac{1}{Q}$ pour Q^{-1} car génératrice de confusions et de fautes ; en effet, à la différence des nombres réels ou complexes, $Q_1^{-1} * Q_2$ n'est pas égal à $Q_2 * Q_1^{-1}$.

On vérifie, comme pour les nombres complexes, que $Q^{-1} * Q = Q * Q^{-1} = 1$. Autre propriété : Si Q_1 et Q_2 ne sont pas nuls, il en est de même de $Q_1 * Q_2$ et $(Q_1 * Q_2)^{-1} = Q_2^{-1} * Q_1^{-1}$ (attention à l'ordre, c'est comme pour l'inversion de matrices).

L'étude des deux opérations de base que sont l'addition et la multiplication (notée $*$), et toutes les propriétés des quaternions mettant en jeu ces opérations, dont la plupart ont été décrites au-dessus, conduisent au résultat final que voici :

Fait 8. L'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions, muni de l'addition (notée $+$) et de la multiplication (notée $*$), est un corps non commutatif.

$\mathbb{H}$ est le plus simple (en termes de construction) des corps non commutatifs. Ce résultat, après lequel courait Hamilton, fait l'objet, assez systématiquement, d'un problème (en devoir à la maison, sujet d'examen ou de concours) dans un cursus d'un étudiant en mathématiques ; un exemple récent en est [2]. Mais, pour ce qui nous concerne ici, c'est l'aspect opérationnel de ces quaternions que nous allons développer.

3.2 Quaternions unitaires et matrices $(3, 3)$ de rotation, même combat !

Nous nous sommes quittés à la fin du §1 avec le paramétrage général $R(a, b, c, d)$ (d'Euler-Rodrigues) d'une matrice $(3, 3)$ de rotation, avec 4 paramètres réels a, b, c, d vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, et voilà que le §3 nous a conduit à considérer des quaternions unitaires, c'est-à-dire $Q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + d$ où, encore, les 4 paramètres réels a, b, c, d vérifient $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. La correspondance entre les deux objets, matrices de rotation $(3, 3)$ et quaternions unitaires, est toute trouvée... En bref, comme indiqué dans l'explicitation du Fait 6 et de (6) et (7) :

- A une rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et d'angle θ, on fait correspondre le quaternion unitaire

$$Q = \alpha \sin(\theta/2)\mathbf{i} + \beta \sin(\theta/2)\mathbf{j} + \gamma \sin(\theta/2)\mathbf{k} + \cos(\theta/2). \tag{28}$$

- Pour tout quaternion unitaire $Q = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} + d$, il existe (α, β, γ) unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = \alpha \sin(\theta/2), b = \beta \sin(\theta/2), c = \gamma \sin(\theta/2), d = \cos(\theta/2). \tag{29}$$

Reste à voir en quoi cette correspondance est utile, c'est l'objet du sous-paragraphe suivant.

Avant d'aller plus loin, rappelons ce qui a été déjà vu d'une autre manière, à savoir que le quaternion unitaire associé à l'inverse R^{-1} de la rotation R associée au quaternion unitaire Q n'est autre que $\overline{Q}$.

3.3 De l'utilité des quaternions dans les opérations avec les rotations de l'espace

Il y a deux choses essentielles dans la manipulation des rotations en 3D :

- Etant donné un vecteur (quelconque) $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$ et une rotation $R(a, b, c, d)$, déterminer le vecteur $R(a, b, c, d)\overrightarrow{u}$ image de $\overrightarrow{u}$ par $R(a, b, c, d)$.

- Etant donné deux rotations $R_1 = R(a_1, b_1, c_1, d_1)$ et $R_2 = R(a_2, b_2, c_2, d_2)$, déterminer les éléments constitutifs (coefficients a_3, b_3, c_3, d_3 entre autres) de la rotation composée R_2R_1 (R_1 suivie de R_2).

Eh bien, les quaternions vont nous aider dans ces tâches.

Fait 9. Si Q est le quaternion unitaire associé à la rotation R, et si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors l'image $R\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{u}$ par R s'obtient par un produit de quaternions comme suit :

$$(R\overrightarrow{u}, 0) = Q * (\overrightarrow{u}, 0) * \overline{Q}. \tag{30}$$

Autre manière de dire la même chose :

$$(\text{quaternion correspondant à } R\overrightarrow{u}) = Q * (\text{quaternion correspondant à } \overrightarrow{u}) * \overline{Q}. \tag{30bis}$$

Explicitons cette manière de faire. Au vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ on associe tout d'abord le quaternion vectoriel $(\overrightarrow{u}, 0) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; on prémultiplie ce quaternion par le quaternion unitaire Q ; on postmultiplie le résultat par la quaternion (également unitaire) $\overline{Q}$; le résultat se trouve être un quaternion vectoriel $x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ associé au vecteur $R\overrightarrow{u}$ précisément.

On notera le jeu subtil entre $\theta/2$ (qui apparaît 2 fois, dans les facteurs Q et $\overline{Q}$) et θ qui est l'angle de la rotation R.

La démonstration de (30) est facile, agréable même ; la voici rapidement. Pour le quaternion Q, on va utiliser le format $(\sin(\theta/2)\overrightarrow{n}, \cos(\theta/2))$. Par application de la formule (24), on obtient :

$$Q * (\overrightarrow{u}, 0) = (\cos(\theta/2)\overrightarrow{u} + \sin(\theta/2)\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}, -\sin(\theta/2)\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{u}\rangle),$$

puis en se servant, une nouvelle fois, des règles de trigonométrie $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$, $2\sin^2(\theta/2) = 1 - \cos\theta$, ainsi que de la formule du double produit vectoriel $\overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{u}\rangle\, \overrightarrow{n} - \overrightarrow{u}$ (car $\|\overrightarrow{n}\| = 1$), on aboutit à

$$[Q * (\overrightarrow{u}, 0)] * \overline{Q} = ((\cos\theta)\overrightarrow{u} + (\sin\theta)\ \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u} + (1 - \cos\theta)\ \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{u}\rangle\, \overrightarrow{n}, 0)\,.$$

A l'aide de (3bis), on reconnaît à présent $R\overrightarrow{u}$ dans ce quaternion vectoriel.

Exemple 3. Soit R la rotation qui correspond au quaternion unitaire $Q = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k} + \frac{1}{2}$. Questions : Quelle est cette rotation ? quels en sont les éléments caractéristiques ? Il y a plusieurs façons de s'y prendre pour répondre ; envisageons en tout premier lieu celle qui consiste à exprimer $R\overrightarrow{u}$ lorsque $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Nous avons à calculer

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k} + \frac{1}{2}\right) * (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) * \left(-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} + \frac{1}{2}\right),$$

qui, après quelques calculs faciles, n'est autre que

$$z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k} \ \ (= x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}).$$

En conséquence,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix},$$

d'où la matrice de rotation $(3, 3)$ suivante

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Une autre façon d'arriver à R au-dessus eût été de construire $R(a, b, c, d)$ via (E-R) (*cf.* §1) puisqu'on dispose des paramètres a, b, c, d d'Euler & Rodrigues de cette rotation.

Encore une autre façon de faire consiste à utiliser (29) qui conduit au vecteur unitaire $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et à la moitié de l'angle θ de la rotation R :

$$\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \ ; \ \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

En définitive, R est une rotation qui opère une permutation circulaire sur les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ de la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ de départ.

Le résultat qui va suivre est une sorte de point culminant de l'illustration de l'utilité des quaternions dans l'étude des rotations : comment voir la *composée de rotations* à l'aide de la *multiplication de quaternions*.

Fait 10. Si Q_1 est le quaternion unitaire associé à la rotation R_1 et si Q_2 est le quaternion unitaire associé à la rotation R_2, alors $Q_2 * Q_1$ est le quaternion unitaire associé à la rotation composée $R_2 R_1$.

La démonstration est simple avec ce qui a été vu en Fait 9. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} (R_1\overrightarrow{u}, 0) &= Q_1 * (\overrightarrow{u}, 0) * \overline{Q}_1, \\ (R_2\overrightarrow{v}, 0) &= Q_2 * (\overrightarrow{v}, 0) * \overline{Q}_2. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (R_2(R_1\overrightarrow{u}), 0) &= Q_2 * (R_1\overrightarrow{u}, 0) * \overline{Q}_2 \\ &= Q_2 * [Q_1 * (\overrightarrow{u}, 0) * \overline{Q}_1] * \overline{Q}_2 \\ &= (Q_2 * Q_1) * (\overrightarrow{u}, 0) * \overline{(Q_2 * Q_1)}. \end{aligned}$$

C'est bien $(R_2R_1)\overrightarrow{u}$ obtenu avec le quaternion $Q_2 * Q_1$ par le procédé décrit en (30).

Exemple 4. Soit R_1 la rotation d'axe engendré par $(1,-1,-1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, R_2 la rotation d'axe engendré par $(0,1,0)$ et d'angle π (un demi-tour donc). Quels sont alors les éléménts descriptifs des rotations R_2R_1 et R_1R_2 ?

Normalisons le vecteur $(1,-1,-1)$ de manière à avoir $\overrightarrow{n_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Par ailleurs, $\frac{\theta_1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Ainsi, les paramètres d'Euler & Rodrigues de R_1 sont

$$a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = -\frac{1}{2}, c_1 = -\frac{1}{2}, d_1 = \frac{1}{2},$$

et le quaternion unitaire associé est $Q_1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} + \frac{1}{2}$.

Opérons de même avec (le déjà normalisé) $\overrightarrow{n_2} = (0,1,0)$ et $\frac{\theta_2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$a_2 = 0, b_2 = 1, c_2 = 0, d_2 = 0,$$

et $Q_2 = \mathbf{j}$.

Le quaternion unitaire associé à R_2R_1 est $\mathbf{j} * (\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} + \frac{1}{2}$. Par conséquent, les paramètres d'Euler & Rodrigues de R_2R_1 sont

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha\sin(\theta/2)\,;\; b = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \beta\sin(\theta/2)\,; \\ c &= -\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \gamma\sin(\theta/2)\,;\; d = \frac{1}{2} = \cos(\theta/2), \end{aligned}$$

et R_2R_1 est la rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Enfin, le quaternion unitaire associé à R_1R_2 est $(\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{2}\mathbf{k}+\frac{1}{2})*\mathbf{j} = \frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}+\frac{1}{2}$. On en déduit, comme au-dessus, que R_1R_2 est la rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Exemple 5. Les formules historiques de B. O. Rodrigues

Rodrigues avait la préoccupation d'obtenir des formules donnant l'axe (dirigée par $\overrightarrow{n_3}$) et le sinus ou cosinus de la rotation composée $R_3 = R_2R_1$ à partir des mêmes informations sur chacune des rotations R_1 et R_2. Il y arriva en utilisant des techniques et résultats de la trigonométrie sphérique. Même si ces formules n'ont qu'un intérêt théorique ou historique, voyons ici comment elles s'obtiennent facilement à l'aide des quaternions.

Désignons par θ_1(resp. θ_2, θ_3) et $\overrightarrow{n_1}$ (resp. $\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}$) l'angle et le vecteur unitaire dirigeant l'axe de la rotation R_1 (resp. R_2, R_3). Alors le premier duo de formules de Rodrigues est comme suit :

$$\sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\overrightarrow{n_3} = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\overrightarrow{n_2} + \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\overrightarrow{n_1} + \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\overrightarrow{n_2}\wedge\overrightarrow{n_1}, \tag{31a}$$

$$\cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle\,. \tag{31b}$$

Pour démontrer ces deux formules simultanément, il suffit, selon l'assertion de Fait 10, de considérer les deux quaternions unitaires $Q_2 = \left(\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\overrightarrow{n_2}, \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)$, $Q_1 = \left(\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\overrightarrow{n_1}, \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right)$ et de calculer $Q_2 * Q_1$. Le résultat doit être $Q_3 = \left(\sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\overrightarrow{n_3}, \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\right)$. L'application de la règle de calcul (24) permet d'arriver directement à (31a) et (31b).

Les formules (31a) et (31b) peuvent expliquer aussi que lorsque θ_1 et θ_2 sont très petits, et que $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont très voisins (de sorte que $\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle \backsimeq 1$ et $\overrightarrow{n_2}\wedge\overrightarrow{n_1} \backsimeq \overrightarrow{0}$), on utilise les approximations suivantes (selon [4, Note A3.9]) :

$$\theta_3 \backsimeq \theta_1 + \theta_2\,;\, \overrightarrow{n_3} \backsimeq \frac{\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{n_2}}{2}.$$

Un autre duo de formules, reformulations de (31a) et (31b), relie les éléments $\overrightarrow{\tau_i} = \overrightarrow{n_i}\tan(\theta_i/2)$, $i = 1, 2, 3$, des trois rotations $R_1, R_2, R_3 = R_2R_1$. Pour cela, comme indiqué en Fait 4, il faut exclure les angles $\theta_i = \pi$, c'est-à-dire les cas où $\cos(\theta_i/2) = 0$. Voici ces formules :

$$\cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\overrightarrow{\tau_3} = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)(\overrightarrow{\tau_1}+\overrightarrow{\tau_2}+\overrightarrow{\tau_2}\wedge\overrightarrow{\tau_1})\,, \tag{32a}$$

$$\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)(1-\langle\overrightarrow{\tau_1},\overrightarrow{\tau_2}\rangle) = \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right). \tag{32a}$$

Il en résulte, comme signalé dans ([3, p. 141 – 142]), lorsque $\langle\overrightarrow{\tau_1},\overrightarrow{\tau_2}\rangle \neq 1$,

$$\overrightarrow{\tau_3} = \frac{\overrightarrow{\tau_1}+\overrightarrow{\tau_2}+\overrightarrow{\tau_2}\wedge\overrightarrow{\tau_1}}{1-\langle\overrightarrow{\tau_1},\overrightarrow{\tau_2}\rangle}. \tag{33}$$

Exemple 6. Retour sur les angles d'Euler

Nous revisitons la composition des trois rotations d'Euler (*cf.* §2) avec une formulation avec les quaternions. De fait, la précession, suivie de la nutation, puis de la rotation propre, résultant en la rotation $R(\varphi,\theta,\psi)$, se traduit par le produit des quaternions que voici :

$$\left(\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{k}+\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)*\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{i}+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)*\left(\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k}+\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) = Q(\varphi,\theta,\psi).$$

Le développement de ce produit conduit, après quelques simplifications trigonométriques, à

$$\begin{aligned} Q(\varphi,\theta,\psi) \;=\; & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\mathbf{i}+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\mathbf{j} \\ & +\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\mathbf{k}+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right). \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les paramètres d'Euler & Rodrigues a, b, c, d de $R(\varphi,\theta,\psi)$ vus au §2.1.

3.4 Passage "en douceur" d'une rotation à une autre

Dans certaines situations, en infographie notamment, on a besoin de passer "en douceur" d'une rotation à une autre via des rotations intermédiaires, ne serait-ce que pour la qualité et le confort visuel d'un observateur ; pour cela il est nécessaire de faire une interpolation entre la rotation de départ et celle d'arrivée (interpolation signifie "entre points" littéralement). La première chose que nous signalons dans cette optique est un résultat négatif, à savoir : l'interpolation la plus simple, la plus intuitive (*i.e.*, par un segment de droite) ne marche pas !

Fait 11. Soit R_0 et R_1 deux matrices orthogonales (pas seulement des rotations) différentes, soit $p > 0$ et $q > 0$ deux coefficients de somme 1 ; alors $pR_0 + qR_1$ n'est *jamais* une matrice orthogonale.

Il faudra donc faire autrement... L'explication géométrique du fait précédent est que les matrices orthogonales se trouvent sur la frontière (une "pelure d'oignon") d'un solide convexe bien lisse et courbé (c'est-à-dire sans zone plate ou de segment) qui est la boule mathématique de rayon $\sqrt{n}$ pour la norme lisse $M \mapsto \|M\| = \sqrt{\operatorname{tr}(M^T M)}$; ainsi, un segment joignant 2 points de la frontière du solide n'a plus aucun point sur la frontière (mis à part les 2 extrémités). Donnons une démonstration directe, et agréable à considérer, du Fait 11. C'est un exercice facile et intéressant d'Algèbre linéaire que nous conseillons.

Nous utiliserons pour cela le produit scalaire entre matrices $(U, V) \mapsto \langle U, V\rangle = \operatorname{tr}(U^T V)$, la norme lisse $\|.\|$ qui en découle (vue plus haut), et la règle de calcul basique $\|U + V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2 + 2\langle U, V\rangle$. Raisonnons par l'absurde : si $pR_0 + qR_1$ était orthogonale, on arriverait à $R_0 = R_1$. En effet, de la relation $(pR_0^T + qR_1^T)(pR_0 + qR_1) = I_n$ et du fait que $R_0^T R_0 = R_1^T R_1 = I_n$, on déduit, en prenant les traces de ces matrices,

$$pq \times \operatorname{tr}\left(R_0^T R_1 + R_1^T R_0\right) = 2pq \times \langle R_0, R_1\rangle = n(1 - p^2 - q^2). \tag{34}$$

Comme

$$\begin{aligned}\|R_0 - R_1\|^2 &= \|R_0\|^2 + \|R_1\|^2 - 2\langle R_0, R_1\rangle \\ &= 2n - 2\langle R_0, R_1\rangle,\end{aligned}$$

on arriverait avec (34) à $\|R_0 - R_1\|^2 = 0$. En conclusion, si $R_0 \neq R_1$, $pR_0 + qR_1$ ne peut être orthogonale.

Ici encore ce sont les quaternions qui vont sauver la mise. Prenons donc deux quaternions unitaires Q_0 et Q_1 (correspondant aux rotations R_0 et R_1 par exemple) et montrons qu'il y a un chemin optimal, en mathématiques on dirait une "géodésique", pour relier Q_0 à Q_1. Pour cela, nous allons tout simplement nous déplacer sur la sphère unité de $\mathbb{R}^4$ en suivant, à vitesse de norme constante, le grand cercle qui va de Q_0 à Q_1.

Fait 12. Supposons Q_1 différent de Q_0 et de $-Q_0$. Le quaternion unitaire

$$Q_t = \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} Q_0 + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha} Q_1 \tag{35}$$

relie le plus courtement possible et à vitesse de norme constante $\left(\left\|\frac{dQ_t}{dt}\right\| = \alpha\right)$, quand t va de 0 à 1, le quaternion unitaire Q_0 au quaternion unitaire Q_1.

La démonstration de ce Fait 12 est facile car le mode opératoire est naturel, il suffit de suivre sur la figure au-dessous.

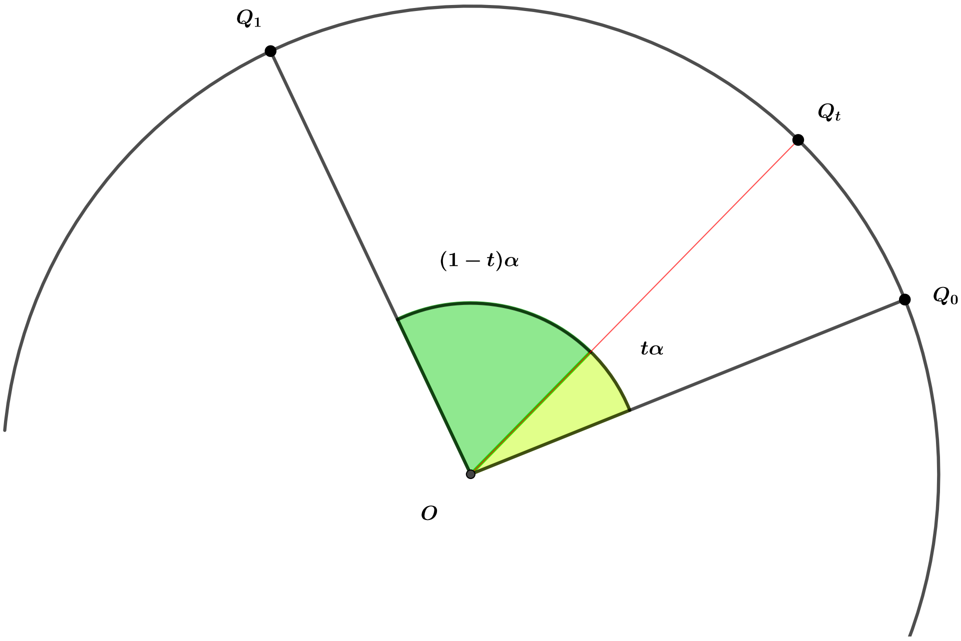

Figure 1.

Le dit écart angulaire entre Q_0 et Q_1, résultant de l'inégalité de Cauchy & Schwarz, est $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos\alpha = \langle Q_0, Q_1 \rangle$. Ici, $\cos\alpha \neq \pm 1$ puisqu'on a supposé Q_1 différent de Q_0 et de $-Q_0$. On prend ensuite la proportion $t\alpha$, $t \in [0, 1]$, de cet α et cela définit le quaternion unitaire Q_t. Voyons analytiquement ce que vaut ce Q_t.

Posons $Q_t = c_0(t)Q_0 + c_1(t)Q_1$ et déterminons ces coefficients $c_0(t)$ et $c_1(t)$. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} \langle Q_0, Q_t \rangle & = & c_0(t) + c_1(t)\cos\alpha = \cos(t\alpha)\,, \\ \langle Q_1, Q_t \rangle & = & c_1(t) + c_0(t)\cos\alpha = \cos((1-t)\alpha)\,. \end{array}$$

On en déduit, grâce à la formule d'addition du cosinus de $t\alpha = \alpha - (1-t)\alpha$ et du fait que $\sin\alpha \neq 0$ (car $\cos\alpha \neq \pm 1$),

$$c_0(t) = \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} \text{ et } c_1(t) = \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha}.$$

D'où l'expression, un peu mystérieuse au premier abord, annoncée dans (35).

Le fait que $\|Q_t\| = 1$ se vérifie de la manière que voici :

$$\begin{aligned}
\|Q_t\|^2 &= \langle Q_t, Q_t\rangle = \left\langle Q_t, \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} Q_0 + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha} Q_1 \right\rangle \\
&= \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} \langle Q_t, Q_0\rangle + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha} \langle Q_t, Q_1\rangle \\
&= \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} \cos(t\alpha) + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha} \cos((1-t)\alpha) \\
&= \frac{\sin((1-t)\alpha) \times \cos(t\alpha) + \sin(t\alpha) \times \cos((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} \\
&= \frac{\sin(t\alpha + (1-t\alpha))}{\sin\alpha} = 1.
\end{aligned}$$

Quant à la vitesse de mouvement de Q_t, nous avons

$$\frac{dQ_t}{dt} = -\alpha\frac{\cos((1-t)\alpha)}{\sin\alpha} Q_0 + \alpha\frac{\cos(t\alpha)}{\sin\alpha} Q_1, \tag{36}$$

dont la norme au carré se calcule à l'aide de la formule $\|U + V\|^2 = \|U\|^2 + \|V\|^2 + 2\langle U, V\rangle$. Ensuite, un peu de trigonométrie comme la formule d'addition du cosinus de $\alpha = t\alpha + (1-t)\alpha$ conduit à

$$\left\|\frac{dQ_t}{dt}\right\|^2 = \alpha^2,$$

d'où le résultat sur dQ_t/dt annoncé.

Remarques.

- Il n'est pas étonnant d'avoir $\|dQ_t/dt\| = \alpha$ vu la vitesse angulaire de rotation du vecteur Q_t autour de l'origine (jeter à nouveau un coup d'oeil sur la Figure 1).

- Dans la littérature spécialisée, le quaternion Q_t est souvent noté $slerp(t; Q_0, Q_1)$, *slerp* venant de *s*pherical *l*inear int*erp*olation (interpolation sphérique linéaire) ; avec la présentation au-dessus on comprend pourquoi.

Conclusion

Les différentes représentations ou paramétrisations des matrices de rotation $(3, 3)$ (basées sur des méthodes matricielles), les angles d'Euler, les quaternions unitaires, sont autant d'outils que l'utilisateur doit avoir dans sa besace et s'en servir. Chacun de ces outils a ses qualités et ses défauts et il n'est pas question de jeter aux orties, de manière définitive, l'un ou l'autre. Nous avons vu par exemple que les angles d'Euler ont leur talon d'Achille avec le possible "blocage de cardan" ; néanmoins, pour des considérations physiques (contrôle d'altitude, postionnement par rapport à un repère lié à un satellite, etc.), on est parfois obligé d'y revenir. Les quaternions, objets mathématiques *a priori* éloignés des problématiques de la mécanique du vol, faisant fi de toutes fonctions trigonométriques pour faire des calculs, ont montré toute leur efficacité ; c'est d'ailleurs assez bluffant... Reste à les utiliser dans leur aspect cinématique ou dynamique, c'est-à-dire en mouvement (quaternions évoluant en fonction du temps). Mais ceci est une autre affaire, que nous ne développerons pas ici.

Remerciements

Nos remerciements vont à Sophie Jan (Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)) et Serge Laporte (Airbus et IMT) pour des échanges sur le sujet, ainsi qu'à Norbert Verdier (IUT de Cachan) pour nous avoir signalé les références [1] et [9].

Les lecteurs-arbitres (*referees*) du Bulletin de l'AMQ ont aussi apporté leurs contributions en proposant des améliorations à la première version proposée de ce texte ; qu'ils en soient aussi remerciés.

Références

1. S. Altman et E. Ortiz, éditeurs. *Mathematics and social utopias in France : Olinde Rodrigues and his times.* Série History of mathematics, vol. 28, American Math Society (2005).

2. Concours national de recrutement de professeurs de mathématiques en collèges et lycées en France (appelé CAPES externe de mathématiques), session de 2019, Problème n° 1.

3. Hui Cheng et K. C. Gupta, *An historical note on finite rotations.* Journal of Applied Mechanics 59 (1989), 139 – 145.

4. T. Hirai, *On the work of Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851) - in particular, on "Expressions of spatial motions" -* . arXiv :2006.00196v1 (30 May 2020).

5. J.-B. Hiriart-Urruty, *Tout ce que vous avez voulu savoir sur les matrices $(3,3)$ de rotation... sans jamais oser le demander. 1ère partie : les différentes paramétrisations.* Document pédagogique de travail, Département de mathématiques de l'université Paul Sabatier de Toulouse (année universitaire 2023 – 2024).

6. O. D. Johns, *Analytical Mechanics.* Oxford Graduate Texts (2nd edition), Oxford University Press (2011).

7. B. Palais, R. Palais et S. Rodi, *A disorienting look at Euler's theorem on the axis of a rotation.* American Math. Monthly 116 (2009), 892 – 909.

8. J. Pujol, *Hamilton, Rodrigues, Gauss, Quaternions, and Rotations : a historical reassessment.* Communications in Mathematical Analysis, vol. 12, n° 2 (2012), 1 – 14.

9. B. O. Rodrigues, *Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendants des causes qui peuvent les produire.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5 (1840), 380 – 440.

Il a été analysé, traduit en anglais, dans

R. Friedberg, *Rodrigues, Olinde : "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide...", translation and commentary".* arXiv :2211.07787 (2022).

10. J.-M. Saint-Jalm, *Sir William Rowan Hamilton et les quaternions.* Quadrature n° 105 (2017), 22 – 29.