

A paraître dans le Bulletin de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)

**Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les matrices
de rotation $(3, 3)$... sans jamais oser le demander**

1^{ère} partie : les différentes paramétrisations

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY¹

Résumé.

Les matrices orthogonales $(3, 3)$ de déterminant 1, appelées encore matrices de rotation $(3, 3)$, sont revisitées ici via leurs différentes paramétrisations. Suivant que l'on privilégie l'exponentiation ou la transformation rationnelle de matrices antisymétriques, on arrive à des représentations condensées (de toutes ces matrices de rotation) qui ne dépendent essentiellement que de 3 paramètres. Le prolongement dans une 2^{ème} partie se fera vers les quaternions, objet mathématique plus utilisé qu'on le pense en mécanique du vol.

Introduction

Les matrices orthogonales $(3, 3)$ (on écrit aussi 3×3) de déterminant 1, ou matrices de rotation $(3, 3)$, en plus de leur interprétation géométrique en Physique-Mécanique à l'origine de leur appellation, ont la particularité qu'on peut en faire une étude approfondie avec les résultats et techniques mathématiques disponibles en Licence². Il y a, bien sûr et d'abord, l'objet "ensemble des matrices de rotation $(3, 3)$ " qu'on peut étudier du point de vue algébrique (structure de groupe par exemple) ou topologique (compacité, connexité, etc.) mais ce n'est pas l'objectif ici. Nous nous intéressons plutôt aux matrices de rotation $(3, 3)$ elles-mêmes et allons les décortiquer dans tous les sens. Nous allons mettre en évidence - et faire ainsi un peu plus de publicité pour - deux formes de paramétrisation de toutes ces matrices de rotation $(3, 3)$, suivant que l'on privilégie l'exponentiation (= la prise d'exponentielle) ou bien une transformation rationnelle de matrices antisymétriques $(3, 3)$ (qui sera ici l'analogue matriciel de $a \in \mathbb{R} \mapsto r = \frac{1-a}{1+a}$). On aboutit ainsi à deux belles formules condensées, lesquelles mériteraient d'être mieux connues à notre sens. Certes, les matrices orthogonales en général, et ces représentations parfois, font l'objet d'exercices ou de sujets d'examens/concours au niveau de formation indiqué plus haut. Nous-mêmes

1. Université Paul Sabatier de Toulouse

118 Route de Narbonne

31062 Toulouse Cedex 09

Mél. jbhu@math.univ-toulouse.fr

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/>

2. De la fin des études secondaires (en lycées) jusqu'à la fin des 3 premières années universitaires, "Licence" dans les systèmes d'éducation européens et québécois, *undergraduate* dans les systèmes universitaires d'influence anglo-américaine.

les avons traitées, ces matrices de rotation (3, 3), dans des exercices d'Algèbre linéaire de niveau Licence 2ème année (Exercices 5-17, 5-19, 5-24, 5-27, 5-36, 5-37 et 5-38 de [3]).

Notre périple se fera comme l'on visite une maison : une pièce, puis une autre,... on revient sur ses pas, on découvre dans une pièce des choses similaires à celles déjà vues dans une pièce précédente... Il y aura forcément quelques légères redites, mais comme disait un de nos humoristes français préférés PIERRE DAC (1893 – 1975) : “*Tout est dans tout... et réciproquement.*”

Le style de notre approche est volontairement pragmatique, davantage Physique-Mécanique que Mathématiques abstraites, comme dans [6] par exemple. Ainsi la matrice réelle A sera aussi bien le tableau avec m lignes et n colonnes que l'application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m dont la représentation matricielle est A dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . Dans toute la suite, on considère \mathbb{R}^3 euclidien muni de sa base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et orienté positivement par elle lorsque nécessaire. Notations standards utilisées : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ pour le produit scalaire et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} de \mathbb{R}^3 .

Il arrive que nous énonçons des “Faits” : ils signifient simplement des résultats mathématiques acquis, démontrés dans les livres de cours ou d'exercices du niveau indiqué plus haut (deux exemples en sont [2] et [3]), dont nous ne reprenons pas les démonstrations ; ce sont des étapes ou des marchepieds dans notre déambulation.

Avant d'entrer de plain pied dans le sujet, un mot du point de vue historique. Comme parfois - en fait souvent - en mathématiques il est difficile de bien discerner “qui a fait quoi”, dans quel ordre, avec quelle généralité, indépendamment ou pas... Pour le cas des matrices de rotation (3, 3), il y a trois niveaux d'intervention que nous décelons :

- Des précurseurs comme EULER (1707 – 1785)... mais lui, il est partout !
- Des bâtisseurs de l'Algèbre linéaire comme A. CAYLEY (1821 – 1895) et W. R. HAMILTON (1805 – 1865), ne serait-ce qu'à travers le théorème qui porte leur nom (même si on sait qu'il ne fut démontré en toute généralité que plus tard par G. FROBENIUS (1849 – 1917)).
- Des moins connus comme B. O. RODRIGUES (1795 – 1851). Celui-ci, mathématicien et économiste français, le seul bordelais de notre collection [4], est connu surtout pour une formule impliquant des suites de polynômes orthogonaux, mais il fit en 1840 une contribution essentielle sur le sujet (voir [11]) : son but, entre autres, était d'obtenir les éléments (axe, rotation) d'une composée de 2 rotations à partir des mêmes éléments des rotations composantes.

Les différents aspects de “qui a fait quoi” sont analysés dans des articles comme [5], [8], [9], [10],[11] et surtout le livre [1] (notamment le chapitre 8 par l'historien des mathématiques de référence J. GRAY).

1. Les matrices orthogonales : les premiers apports de l'Algèbre linéaire

1.1 Généralités

Les *matrices orthogonales* ont ceci de particulier qu'elles ont une définition et des moyens de les reconnaître très simples. Tout d'abord la définition : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ³ est

3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels à n lignes et n colonnes. D'une

orthogonale si et seulement si $MM^T = I_n$ (ou, de manière équivalente, $M^T M = I_n$); ainsi l'inverse de M est on ne peut plus facile à calculer puisque $M^{-1} = M^T$. Parmi les autres caractérisations, signalons celles-ci :

- Les n vecteurs-colonnes (ou les n vecteurs-lignes) de M constituent une base orthonormale de \mathbb{R}^n (c'est-à-dire : ils sont de longueur 1 et orthogonaux 2 à 2). Ceci militerait d'ailleurs pour qu'on qualifie d'*orthonormales* ces matrices plutôt qu'orthogonales (cette dernière propriété concernant davantage des vecteurs ou des sous-espaces), mais trop tard, le mal est fait...

- L'application linéaire $M : \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto M\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ conserve les angles et les longueurs (c'est-à-dire : $\langle M\vec{u}, M\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ pour tout \vec{u}, \vec{v} dans \mathbb{R}^n ; $\|M\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ pour tout \vec{u} dans \mathbb{R}^n).

Soit donc $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale.

Fait 1. Le déterminant de M vaut 1 ou -1 .

Fait 2. Les seules valeurs propres réelles possibles de M sont 1 et -1 .

Fait(s) 3. On suppose ici que la dimension n est *impaire*.

- Si $\det M$ vaut 1, alors M admet la valeur propre 1 avec un ordre de multiplicité impair, et donc *au moins une fois*. Cela signifie notamment que l'application $\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mapsto M\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ admet un vecteur fixe non nul \vec{u} (c'est-à-dire un \vec{u} non nul pour lequel $M\vec{u} = \vec{u}$), et même une droite (vectorielle⁴) d'éléments fixes, ce qui ne saute pas aux yeux! et que les résultats et techniques d'Analyse (sur les dits "points fixes") ne permettent pas de démontrer, mais celles de l'Algèbre linéaire oui!⁵

- Si $\det M$ vaut -1 , alors M admet la valeur propre -1 avec un ordre de multiplicité impair.

Pour l'ordre de multiplicité des valeurs propres 1 et -1 , on est amené à composer avec les autres valeurs propres (éventuellement complexes, mais toutes de module 1) de M .

Nous serons amenés plus bas à décortiquer le cas, essentiel pour nous, où $n = 3$ et $\det M = 1$.

Fait 4. On suppose que la dimension n est *paire*. Alors :

- Si $\det M$ vaut 1, il se peut que ni 1 ni -1 ne soient valeurs propres de M .

- Si $\det M$ vaut -1 , alors M admet les valeurs propres -1 et 1 avec des ordres de multiplicité impairs.

Nous verrons un exemple de cette situation juste au-dessous dans le cas simple, mais fondamental, où $n = 2$ et $\det M = 1$.

Les matrices $(2, 2)$ ou $(3, 3)$ orthogonales dont le déterminant vaut 1 sont appelées *matrices de rotation* ou simplement des *rotations* (de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3); le choix de cette dernière appellation "géométrique", mais aussi "physique" ou "mécanique", est, bien sûr, volontaire

manière standard, A^T désigne la matrice transposée de A , A^{-1} désigne l'inverse de la matrice (inversible) A , etc.

4. Le qualificatif de *vectoriel(elle)* est là pour le distinguer d'*affine* (dans le cas de droites ou de plans).

5. EULER avait bien signalé en 1775 : "*Quelle que soit la manière dont une sphère peut tourner autour de son propre centre, un diamètre peut toujours être choisi dont la direction dans la configuration en rotation coïnciderait avec la configuration d'origine.*" Le texte est traduit et analysé dans l'article [11]; mais à son époque on ne connaissait pas l'Algèbre linéaire (matrices, valeurs et vecteurs propres).

et s'expliquera par la suite. A partir du paragraphe 2, la notation générique pour une matrice de rotation sera le plus souvent R .

Les matrices antisymétriques $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire celles pour lesquelles $A^T = -A$, interviennent de manière assez surprenante (du moins au premier abord) dans la construction de matrices $(3, 3)$ orthogonales. Voici à cet égard un exemple de résultat qui nous servira au paragraphe 3.

Fait 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique inversible commutant avec A . Alors $A + B$ et $A - B$ sont inversibles, et $(A + B)(A - B)^{-1}$ est orthogonale. C'est le cas pour l'exemple particulier où $B = I_n$.

1.2 Le cas très pédagogique des rotations du plan, c'est-à-dire lorsque $n = 2$

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale et de déterminant égal à 1.

Fait 6. M est nécessairement de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \theta \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

matrice que nous noterons M_θ pour simplifier les explications.

Cette représentation M_θ a des vertus pédagogiques que nous ne soupçonnons pas d'emblée mais que nous allons expliciter à présent (suivre sur la Figure 1) :

- Dans le plan \mathbb{R}^2 euclidien orienté, l'application $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mapsto M_\theta \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ représente une rotation (au sens géométrique ou physique du terme) d'angle θ autour de l'origine (point fixe) O .

- De la base de départ $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ on est passé à la nouvelle base orthonormale $\{\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}\}$ où $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\overrightarrow{v(\theta)} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ (voir la Figure 1).

- L'application $\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \mapsto M_{(-\theta)} \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ défait l'opération précédente puisqu'il s'agit d'une rotation d'angle $-\theta$ autour de l'origine O ; autrement dit, $M_{(-\theta)} = (M_\theta)^{-1}$ (et de fait $M_{(-\theta)} = (M_\theta)^T$).

- Mis à part le cas où $\sin \theta = 0$ (c'est-à-dire lorsque $\theta = 0$ ou π (à $2k\pi$ près)), on "voit" grâce à la transformation ponctuelle explicitée au-dessus (une rotation) que M_θ ne peut pas avoir de valeur propre réelle (c'est-à-dire une situation avec un λ réel et un vecteur non nul $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_\theta \vec{u} = \lambda \vec{u}$). Les deux cas particuliers exclus sont ceux où $M_\theta = I_2$ (c'est-à-dire, "on ne bouge pas") ou bien $M_\theta = -I_2$ (symétrie ponctuelle par rapport à l'origine O).

- Les matrices de rotation M_α et M_β commutent (cela n'arrivera pas souvent par la suite!) et $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta}$, ce qui encore une fois se "voit" avec les opérations de rotation sous-jacentes. Ajoutons que le résultat matriciel $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta}$ contient les formules d'addition $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \times \cos \beta - \sin \alpha \times \sin \beta$ et $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \beta$, ce qui est très agréable.

- Mis à part le cas où $\sin \theta = 0$, les valeurs propres de M_θ ne sont plus réelles et on ne peut "réduire" davantage M_θ en ne travaillant qu'avec les nombres réels... Si on accepte de travailler avec les nombres complexes, oui M_θ est diagonalisable et la matrice diagonale

semblable est $\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$; mais nous resterons, pour les objectifs qui sont les nôtres, dans le contexte des réels.

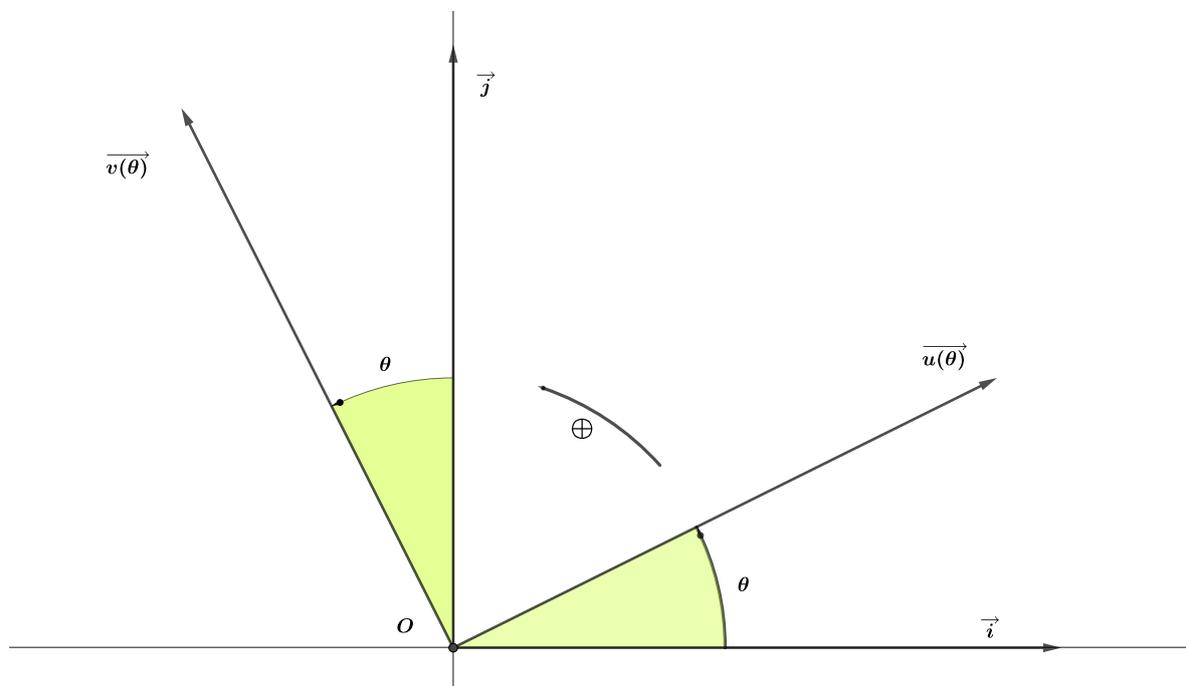


Figure 1.

1.3 En route pour le cas essentiel des rotations dans l'espace, c'est-à-dire lorsque $n = 3$

Ici comme dans toute la suite, on considère \mathbb{R}^3 euclidien muni de sa base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et orienté positivement par elle lorsque nécessaire⁶.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et de déterminant égal à 1. Une première conséquence de choses déjà vues plus haut (*cf.* Fait 3) est comme suit :

Fait 7. 1 est forcément valeur propre de M ; c'est une valeur propre simple (ce qui sera le cas standard) ou une valeur propre triple (auquel cas $M = I_3$).

Ecartons le cas trivial où $M = I_3$. Alors l'ensemble \mathbb{D} des vecteurs invariants par M est une droite vectorielle. Soit \mathbb{P} le plan vectoriel orthogonal à \mathbb{D} .

Fait 8. Le plan \mathbb{P} est stable par M et la restriction de M à \mathbb{P} est une rotation.

Cela signifie entre autres que le travail présenté au paragraphe 1.2 nous est immédiatement utile ici. Prenons en effet une base orthonormée $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de \mathbb{R}^3 adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathbb{P} \oplus \mathbb{D}$, c'est-à-dire $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base du plan \mathbb{P} et \vec{v}_3 vecteur dirigeant la droite \mathbb{D} . Alors

6. Les autres bases orthonormales (b.o.n. en abrégé chez des auteurs) sont obtenues par transformations orthogonales à partir de ce choix initial de base orthonormée. Lorsque ces transformations orthogonales sont de déterminant 1, bref des rotations, les nouvelles bases orthonormales ont même orientation que l'initiale, on les appelle parfois bases orthonormales directes (en abrégé b.o.n.d. comme James).

la matrice de M dans cette nouvelle base est

$$M' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On comprend que la droite \mathbb{D} est dite *axe de rotation* de M et \mathbb{P} *plan de rotation* de M (suivre sur la Figure 2).

Le choix des orientations de \mathbb{P} et \mathbb{D} appelle quelques précisions. L'orientation de \mathbb{P} et celle de \mathbb{D} doivent être *concordantes* au sens suivant : \vec{v}_3 orientant \mathbb{D} , la base orthonormale directe (c'est-à-dire d'orientation positive) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de \mathbb{P} est choisie de sorte que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ soit une base orthonormale directe de \mathbb{R}^3 . Dans le cas de la Figure 2, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{n}\}$ et $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, -\vec{n}\}$ sont toutes les deux des bases orthonormales directes, mais, dans le premier cas, l'angle de la rotation est θ (à $2k\pi$ près) tandis qu'il est $-\theta$ (à $2k\pi$ près) dans le deuxième cas. Ainsi, une même rotation donne lieu à *deux* déterminations suivant l'orientation de \mathbb{D} : $(\vec{n}$ et θ) ou bien $(-\vec{n}$ et $-\theta$). Si on veut éviter à tout prix cette ambiguïté, on peut décider de choisir $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\alpha > 0$, ou $(0, \beta, \gamma)$ avec $\beta > 0$ si $\alpha = 0$, ou enfin $(0, 0, 1)$ si $\alpha = \beta = 0$.

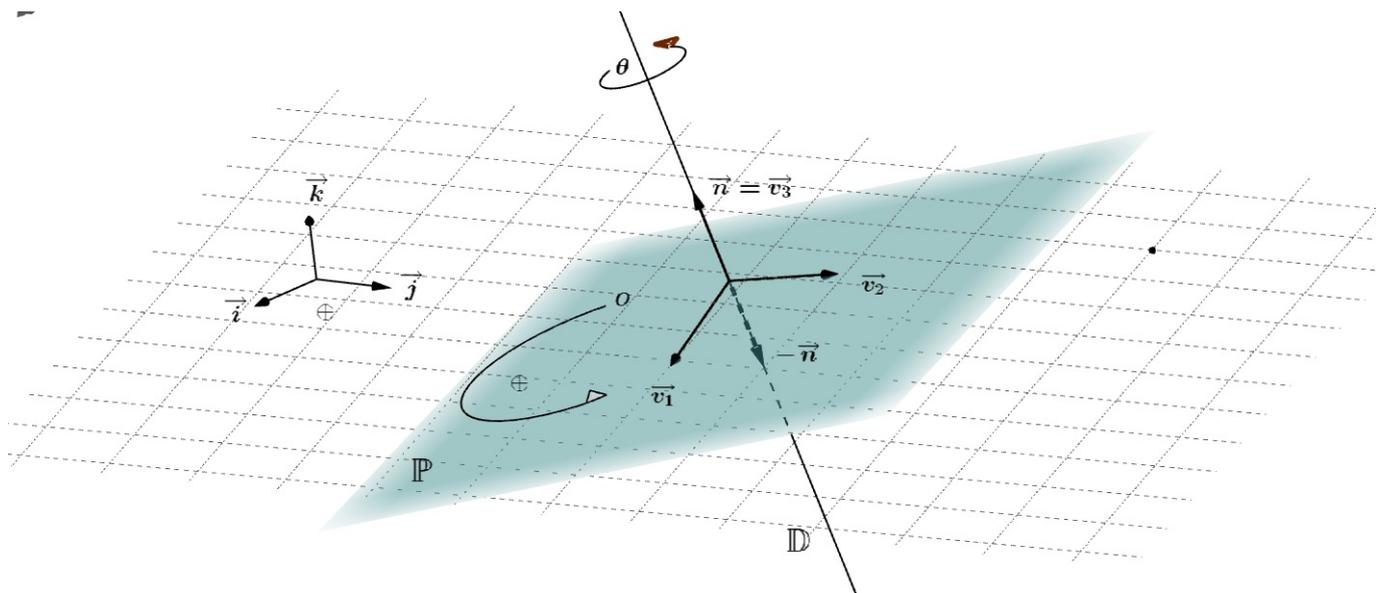


Figure 2.

Voici un résultat immédiatement déduit de l'Algèbre linéaire, du fait que la trace d'une matrice M reste la même pour les matrices semblables à M (et donc pour la matrice M' plus haut).

Fait(s) 9. Le cosinus de l'angle θ de la rotation plane induite sur \mathbb{P} par M est donné par

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr}M - 1). \quad (2)$$

Ainsi, avec la donnée initiale M , on a accès à $\cos \theta$ sans avoir à trouver M' ; et qui a accès à $\cos \theta$ a accès à $|\sin \theta|$ puisque $|\sin \theta| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$.

Autre observation. Le polynôme caractéristique $P_M(X) = \det(M - XI_3)$ de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant en général

$$P_M(X) = -X^3 + (\operatorname{tr}M)X^2 - (\operatorname{tr}(\operatorname{cof}M))X + \det M,$$

où $\operatorname{cof}M$ désigne la “matrice des cofacteurs” (appelée aussi “comatrice”)⁷ de M , on a une grande simplification ici pour une matrice de rotation M . En effet, dans ce cas, M est égale à sa matrice de cofacteurs $\operatorname{cof}M$ (puisque $M^{-1} = M^T$ et $\det M = 1$), résultat intéressant en lui-même, et le polynôme caractéristique de M s’exprime aisément à l’aide de $\operatorname{tr}M$ ($= 2 \cos \theta + 1$), c’est

$$-X^3 + (\operatorname{tr}M)X^2 - (\operatorname{tr}M)X + 1 = (1 - X) [X^2 - (\operatorname{tr}M - 1)X + 1].$$

Comme M et M' sont des matrices semblables ($M' = P^{-1}MP$, où P est une matrice de changement de base), on aurait pu aussi arriver à cette dernière factorisation par

$$P_M(X) = P_{M'}(X) = (1 - X) [X^2 - (2 \cos \theta)X + 1].$$

Exemple 1. Cet exemple nous servira de fil rouge dans toute notre présentation. Soit

$$M_{ex1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{3} & \sqrt{2} & 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Illustrons sur cet exemple tout ce que nous avons vu dans ce paragraphe 1.

Tout d’abord, M_{ex1} est orthogonale (pour cela, le plus simple est de vérifier que les vecteurs-colonnes de M_{ex1} forment un système orthonormal ou bien, ce qui revient au même, $M_{ex1}M_{ex1}^T = I_3$) et $\det M_{ex1} = 1$ (oui il y a un petit calcul à faire); donc M_{ex1} est bien une (matrice de) rotation.

Puisque M_{ex1} n’est pas I_3 , sans calcul supplémentaire, nous savons que 1 est valeur propre *simple* de M_{ex1} . L’axe de rotation $\mathbb{D} = \{\vec{u} = (x, y, z) : M_{ex1} \vec{u} = \vec{u}\}$ est la droite dirigée par le vecteur $(1, 0, 1)$, tandis que le plan de rotation $\mathbb{P} = \mathbb{D}^\perp$ a pour équation $x + z = 0$. Grâce à la formule (2), le cosinus de l’angle θ de la rotation plane induite sur \mathbb{P} par M_{ex1} est $\sqrt{3}/2$. Choisissons une base orthonormée $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de \mathbb{P} à laquelle nous adjoignons un vecteur unitaire \vec{v}_3 de \mathbb{D} de façon à obtenir une base orthonormée directe $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de \mathbb{R}^3 ; par exemple :

$$\vec{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

7. $(\operatorname{cof}M)_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$, où M_{ij} est la matrice $(n-1, n-1)$ déduite de M en enlevant la i -ème ligne et la j -ème colonne. Lorsque M est inversible, $M^{-1} = \frac{1}{\det M} (\operatorname{cof}M)^T$.

En utilisant la matrice de passage P à la nouvelle base, c'est-à-dire la matrice de rotation

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ on obtient alors la matrice "réduite" semblable à } M_{ex1} \text{ que voici :}$$

$$M'_{ext1} = P^{-1}M_{ex1}P = P^T M_{ex1}P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Nous retenons de cet exemple que la détermination de l'axe de rotation peut nécessiter quelques calculs, pas difficiles néanmoins. Il y a moyen de faire mieux, en fait plus rapide, comme nous le verrons plus loin (au sous-paragraphe 4.1).

Une question centrale, à laquelle les résultats de cette section 1 ne permettent pas de répondre directement, et qui a préoccupé les mathématiciens cités dans l'introduction comme O. RODRIGUES, est : si M_1 et M_2 sont des rotations, il en est de même de M_1M_2 ; mais alors, si je vous donne l'axe et le cosinus (ou le sinus) de l'angle de chacune des deux rotations, $(\mathbb{D}_1, \cos \theta_1)$ et $(\mathbb{D}_2, \cos \theta_2)$, comment obtenir (si cela est possible !) l'axe \mathbb{D}_3 et le cosinus $\cos \theta_3$ (ou le sinus) de l'angle de la rotation M_1M_2 ? Nous y reviendrons à l'occasion plus loin.

2. D'une matrice antisymétrique vers une matrice de rotation par exponentiation et vice versa

2.1 Exponentiation d'une matrice antisymétrique

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ une matrice $(3, 3)$ antisymétrique. Evitons, dans les calculs

généraux du moins, le cas trivial où a, b et c sont tous nuls. Le choix et la répartition des signes dans les coefficients de la matrice ne sont pas innocents, comme nous le verrons par la suite. En calculant $R = e^A$ on constate que R est une rotation, voici comment. Rappelons au préalable que e^A est la somme de la série (matricielle) de terme général $\frac{A^n}{n!}$.

Tout d'abord, pour le cas trivial où a, b et c sont tous nuls, A est la matrice nulle et e^A la matrice identité.

Considérons donc le cas où a, b et c ne sont pas tous nuls. Commençons par le caractère orthogonal de R ; il est facile à vérifier puisque, en raison de la continuité de l'application $A \mapsto A^T$ et du fait que $(A^k)^T = (A^T)^k$, on a $(e^A)^T = e^{(A^T)} = e^{-A}$; or $e^{-A} = (e^A)^{-1}$. Donc $(e^A)^T = (e^A)^{-1}$ et $R = e^A$ est bien orthogonale. Ensuite, se rappelant que $\det(e^A) = e^{\text{tr}A}$ (un résultat d'Algèbre linéaire en soi fort intéressant), on a ici $\det R = e^{\text{tr}A} = e^0 = 1$; $R = e^A$ est bien une rotation de \mathbb{R}^3 .

Explicitons e^A en fonction des coefficients a, b, c de A . Pour cela, on peut commencer par diagonaliser A , ce qui est possible (dans \mathbb{C} évidemment)⁸, $A = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P^{-1}$,

8. Le spectre d'une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est contenu dans $i\mathbb{R}$ et il existe une matrice

et utiliser la formule de “passage à travers P et P^{-1} ” $e^A = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}) P^{-1}$. C’est un peu long et fastidieux (en raison du calcul de P), même si cette méthode a le mérite de faire apparaître les valeurs propres λ_i de A (qui sont 0 , ir et $-ir$, où $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (la longueur du vecteur (a, b, c) de \mathbb{R}^3)) et celles de e^A (qui sont 1 , e^{ir} et e^{-ir}).

Une autre méthode, recommandée et plus utile pour ce qui va suivre, est de calculer A^n pour tout entier n et d’utiliser la définition (déjà rappelée) de e^A comme somme de la série de terme général $\frac{A^n}{n!}$, $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Il se trouve que les calculs sont simples ici puisque le polynôme caractéristique de A est $-X^3 - r^2X = -X(X^2 + r^2)$, d’où $A^3 = -r^2A$ (d’après le théorème de CAYLEY & HAMILTON qui permet d’affirmer “qu’une matrice est zéro de son polynôme caractéristique”) et, par suite, $A^{2n+1} = (-r^2)^n A$ et $A^{2n+2} = (-r^2)^n A^2$ pour tout n . En conséquence,

$$e^A = I_3 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-r^2)^n}{(2n+1)!} \right) A + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-r^2)^n}{(2n+2)!} \right) A^2 ; \quad (5)$$

$$e^A = I_3 + (\sin r) \frac{A}{r} + (1 - \cos r) \left(\frac{A}{r} \right)^2. \quad (5bis)$$

Cette décomposition, simple et condensée au demeurant, mérite quelques commentaires :

- Un peu surprenant que $\sin r$ et $\cos r$ apparaissent d’un coup dans cette décomposition..., il n’y a pas (encore) d’angle en jeu ; mais après tout il y a eu une exponentiation (= une prise d’exponentielle) et e^{ir} cache un cosinus et un sinus puisque $e^{ir} = \cos r + i \sin r$.

- Les matrices I_3 et A , constitutives de e^A , se trouvent dans les décompositions (5) – (5bis), ce qui est normal. De plus, nous savions que e^A aurait une expression polynomiale de degré 2 en A (encore une conséquence du théorème de CAYLEY & HAMILTON).

- La division par r est due au fait que “tout est normalisé” par r , elle aurait disparu si on avait imposé que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ pour les coefficients a, b, c apparaissant dans la matrice antisymétrique A . Cette observation milite pour une paramétrisation différente de l’ensemble $\mathcal{AS}_3(\mathbb{R})$ des matrices $(3, 3)$ antisymétriques, un peu comme lorsqu’on passe des coordonnées cartésiennes à des coordonnées polaires.

Considérons donc $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$ où $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ (le 1 en indice de A_1 est

là pour rappeler cette normalisation) et $\theta \in \mathbb{R}$. Il est clair que toute matrice antisymétrique est de la forme θA_1 . Ce faisant, on n’a rien perdu en degrés de liberté : trois variables a, b, c dans la première version, deux (mettons α et β puisque la troisième, γ , est contrainte par la condition $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) plus une (c’est θ) dans la deuxième version. On a gagné qu’on a découpé les contributions de (α, β, γ) et de θ et cela rendra les écritures (de e^A)

unitaire P telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Le plus rapide pour voir cela est d’observer que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est antisymétrique si et seulement si iA est hermitienne et de se rappeler le puissant résultat que voici : le spectre $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ d’une matrice hermitienne H est contenu dans \mathbb{R} et il existe une matrice unitaire P telle que $P^{-1}HP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

plus lisibles. Ainsi, en utilisant des calculs déjà effectués : les valeurs propres de A_1 sont 0, i et $-i$, le polynôme caractéristique de A_1 est $-X^3 - X = -X(X^2 + 1)$, $A_1^3 = -A_1$ et, surtout,

$$e^{\theta A_1} = I_3 + (\sin \theta)A_1 + (1 - \cos \theta)A_1^2. \quad (5ter)$$

Quelques observations particulières et conséquences immédiates :

- Pour le cas où $\theta = 0$ (qui correspond à $r = 0$ dans la première version) on retrouve bien que $e^0 = I_3$.

- La matrice A_1 est antisymétrique par définition (donc $\langle A_1 \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, propriété qui servira dans des calculs plus loin) ; la matrice A_1^2 est, elle, symétrique (simple vérification).

- Changer θ en $-\theta$ en même temps que A_1 en $-A_1$ ne change rien à la rotation finale $e^{\theta A_1}$; on le savait dès le départ puisque $e^{\theta A_1} = e^{(-\theta)(-A_1)}$ mais on le vérifie à l'arrivée avec l'expression dans le membre de droite de (5ter).

- Les cas où $\sin \theta = 0$, c'est-à-dire ceux où $\theta = 0$ ou π (à $2k\pi$ près), sont les seuls où la rotation $e^{\theta A_1}$ est symétrique.

- On retrouve via (5ter) que l'inverse de $e^{\theta A_1}$ est

$$e^{-\theta A_1} = I_3 - (\sin \theta)A_1 + (1 - \cos \theta)A_1^2 = (e^{\theta A_1})^T.$$

- Développement en θ au voisinage de $\theta = 0$:

$$e^{\theta A_1} = I_3 + (\sin \theta)A_1 + (1 - \cos \theta)A_1^2 \simeq I_3 + \theta A_1 + \frac{\theta^2}{2}A_1^2.$$

Cette ultime expression (5ter) de $e^{\theta A_1}$ est celle à laquelle nous nous raccrocherons autant que possible.

Il y a au moins une autre méthode pour vérifier que $I_3 + (\sin \theta)A_1 + (1 - \cos \theta)A_1^2$ est l'exponentielle de θA_1 . La voici, elle est fort intéressante car elle s'appuie sur une autre partie des mathématiques de niveau Licence, à savoir les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Considérons la fonction matricielle de la variable réelle suivante :

$$X : \theta \in \mathbb{R} \mapsto X(\theta) = I_3 + (\sin \theta)A_1 + (1 - \cos \theta)A_1^2.$$

Se rappelant que $A_1^3 = -A_1$, on observe que $\frac{dX}{d\theta} = (\cos \theta)A_1 + (\sin \theta)A_1^2$ n'est autre que $A_1 X(\theta)$. En somme, $X(\cdot)$ est la solution du problème de CAUCHY vectoriel linéaire à coefficients constants suivant

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\theta} = A_1 X(\theta) \\ X(0) = I_3 \end{cases},$$

c'est-à-dire $\theta \in \mathbb{R} \mapsto X(\theta) = e^{\theta A_1}$ précisément.

2.2 Dissection de la formule (5ter)

- Il est utile de garder en tête pour plus tard l'observation (déjà faite) que la partie symétrique de $e^{\theta A_1}$ est $I_3 + (1 - \cos \theta) A_1^2$, tandis que la partie antisymétrique de $e^{\theta A_1}$ est $(\sin \theta) A_1$.

- Regardons d'un peu plus près l'action de l'antisymétrique A_1 et du symétrique A_1^2 sur un vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 .

Commençons par la matrice antisymétrique A_1 . En notant \vec{n} le vecteur unitaire (α, β, γ) , on a

$$A_1 \vec{u} = \begin{pmatrix} -\gamma y + \beta z \\ \gamma x - \alpha z \\ -\beta x + \alpha y \end{pmatrix}, \text{ qui n'est autre que } \vec{n} \wedge \vec{u}; \quad (6)$$

donc l'action de A_1 sur \vec{u} est de prendre le produit vectoriel avec ce vecteur unitaire constitutif $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ de A_1 .

Mais quid de la matrice symétrique A_1^2 ? Comme on vient de le voir, $A_1^2 \vec{u} = A_1(A_1 \vec{u}) = \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u})$; ainsi, d'après (5ter),

$$\vec{u} \mapsto R \vec{u} = e^{\theta A_1} \vec{u} = \vec{u} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u} + (1 - \cos \theta) \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}). \quad (7)$$

Mais on peut être plus explicite sur l'action de A_1^2 sur \vec{u} . En effet, on a

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} -\beta^2 - \gamma^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & -\alpha^2 - \gamma^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & -\alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$-A_1^2 = I_3 - \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (8bis)$$

$$-A_1^2 = I_3 - \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \times [\alpha \quad \beta \quad \gamma]. \quad (8ter)$$

On reconnaît dans la deuxième matrice du membre de droite de (8bis) ou (8ter) la matrice de projection orthogonale sur la droite dirigée par \vec{n} , et donc dans $-A_1^2$ la matrice de projection orthogonale sur le plan $(\mathbb{R}\vec{n})^\perp$ orthogonal⁹ à la droite dirigée par \vec{n} .

Une autre manière de procéder aurait été de partir de (7) et d'utiliser la formule du double produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u}) &= \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n} - \|\vec{n}\|^2 \vec{u}, \\ &= \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n} - \vec{u} \text{ car } \|\vec{n}\| = 1. \end{aligned}$$

Ce vecteur $\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{u})$ est l'opposé du vecteur projeté orthogonal de \vec{n} sur $(\mathbb{R}\vec{n})^\perp$ (alors que $\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n}$ est le vecteur projeté orthogonal de \vec{u} sur la droite $\mathbb{R}\vec{n}$).

9. Nous utilisons la notation V^\perp pour désigner le sous-espace vectoriel orthogonal du sous-espace vectoriel V .

En clair, on peut réécrire (7) en

$$\vec{u} \mapsto R\vec{u} = \vec{u} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u} + (\cos \theta - 1) \text{proj}_{(\mathbb{R}\vec{n})^\perp}(\vec{u}); \quad (7bis)$$

ou encore en

$$\begin{aligned} \vec{u} \mapsto R\vec{u} &= (\cos \theta) \vec{u} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u} + (1 - \cos \theta) \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n} \\ &= (\cos \theta) \vec{u} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u} + (1 - \cos \theta) \text{proj}_{\mathbb{R}\vec{n}}(\vec{u}). \end{aligned} \quad (7ter)$$

On peut vérifier avec cette décomposition que, par exemple, $\langle R\vec{u}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle$, c'est-à-dire que les vecteurs projetés orthogonaux de $R\vec{u}$ et de \vec{u} sur la droite dirigée par \vec{n} sont les mêmes.

- Condensons l'expression de $e^{\theta A_1}$ dans (5ter) en une seule matrice. Cela donne, après quelques simplifications,

$$e^{\theta A_1} = \begin{bmatrix} \cos \theta + \alpha^2(1 - \cos \theta) & -\gamma \sin \theta + \alpha\beta(1 - \cos \theta) & \beta \sin \theta + \alpha\gamma(1 - \cos \theta) \\ \gamma \sin \theta + \alpha\beta(1 - \cos \theta) & \cos \theta + \beta^2(1 - \cos \theta) & -\alpha \sin \theta + \beta\gamma(1 - \cos \theta) \\ -\beta \sin \theta + \alpha\gamma(1 - \cos \theta) & \alpha \sin \theta + \beta\gamma(1 - \cos \theta) & \cos \theta + \gamma^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

On peut "homogénéiser" un peu plus de manière à faire disparaître les $\cos \theta$ et $\sin \theta$, sans pour autant perdre en généralité; les choses seront ainsi plus lisibles et faciles à utiliser. Procédons au changement de variables suivant (absolument fondamental et pas du tout intuitif!) :

$$a = \alpha \sin(\theta/2), b = \beta \sin(\theta/2), c = \gamma \sin(\theta/2), d = \cos(\theta/2). \quad (10)$$

Sachant que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, on vérifie facilement que a, b, c, d définis au-dessus en (10) vérifient $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Dans l'autre sens, on opère en distinguant deux cas : si $d^2 < 1$, d est un $\cos(\theta/2)$ avec $\sin(\theta/2) \neq 0$ et α, β, γ suivent ; si $d^2 = 1$, les autres coefficients a, b, c sont nuls et il suffit de choisir par exemple $\theta = 0$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Il y a ainsi un va-et-vient entre les jeux de paramètres $(\theta ; \alpha, \beta, \gamma)$ et (a, b, c, d) :

$$(\theta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1). \quad (11)$$

En bref, moyennant quelques calculs basés sur les formules $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ et $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$, on arrive à la forme dépouillée suivante de $e^{\theta A_1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & -a^2 + b^2 - c^2 + d^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc + ad) & -a^2 - b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix} \\ \text{où } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \end{array} \right. \quad (12)$$

Cette utilisation de $\theta/2$ plutôt que θ interviendra à nouveau par la suite.

Quelques cas particuliers :

- Lorsque $d^2 = 1$, auquel cas $a = b = c = 0$: la rotation en question est l'identité I_3 .

- Lorsque $a^2 = 1$, auquel cas $b = c = d = 0$: la rotation en question est le demi-tour d'axe dirigé par $\vec{n} = (1, 0, 0)$.

- Les deux autres cas, $b^2 = 1$ ou $c^2 = 1$, sont comme au-dessus *mutatis mutandis*.

2.3 D'une matrice de rotation à une matrice antisymétrique source d'exponentiation

En prenant l'exponentielle d'une matrice $(3, 3)$ antisymétrique, on a obtenu une (matrice de) rotation $(3, 3)$... Oui mais, ce faisant, est-on sûr d'avoir "atteint" toutes les rotations ? Bref, pour une matrice de rotation R donnée, existe-t-il un réel θ et une matrice antisymétrique du type A_1 telle que $e^{\theta A_1} = R$? La réponse est oui, et cela est assez facile à démontrer.

Commençons par nous remémorer le cas plus simple du plan (dimension 2). Nous savons (cf. sous-paragraphe 1.2) que toute rotation de \mathbb{R}^2 est de la forme $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Alors la matrice antisymétrique θJ , avec $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ fait notre affaire. En effet, $J^2 = -I_2$, $J^3 = -J$, $J^4 = I_2, \dots$ de sorte que $J^{2n+1} = (-1)^n J$ et $J^{2n} = (-1)^n I_2$ pour tout n . En conséquence, selon un calcul similaire à celui fait pour arriver à (5),

$$e^{\theta J} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} \right) I_2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) J,$$

$$e^{\theta J} = (\cos \theta) I_2 + (\sin \theta) J = R_\theta. \quad (13)$$

Le cas de la dimension 3 relève de la même idée puisqu'une matrice de rotation R de \mathbb{R}^3 peut être "découplée" en une matrice de rotation dans un plan et une droite invariante (cf. commentaires suite au Fait 8) ; plus précisément, il existe une matrice P , que l'on peut choisir d'ailleurs orthogonale, telle que

$$P^{-1} R P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ soit } R = P \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Ensuite, l'exponentiation fait son oeuvre : d'une part, elle "passe à travers une matrice de passage P et son inverse P^{-1} ", $\exp(P A P^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$, et d'autre part, elle respecte la structuration d'une matrice par blocs diagonaux. Ainsi, si l'on considère la matrice antisymétrique (en deux blocs diagonaux $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $[0]$) défini comme

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et sa cousine } A_1 = P(A'_1)P^{-1}, \text{ toujours antisymétrique car } P \text{ est orthogonale, on a :}$$

$$e^{\theta A_1} = e^{P(\theta A'_1)P^{-1}} = P e^{\theta A'_1} P^{-1} \quad (14)$$

$$= P \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = R. \quad (14bis)$$

En notant $\mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des rotations (d'autres utilisent $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$), nous avons donc montré aux sous-paragraphes 2.1 et 2.3 que l'application basée sur l'exponentielle (de matrices)

$$\begin{aligned} \mathcal{AS}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R}) \\ (\theta, A_1) &\longmapsto e^{\theta A_1} \end{aligned}$$

est surjective. Elle n'est évidemment pas injective, $e^{\theta A_1}$ et $e^{(\theta+2\pi)A_1}$ donnent par exemple la même matrice de rotation. Un intervalle de longueur 2π suffirait pour θ mais même là, comme nous l'avons déjà observé, $-\theta$ et $-A_1$ conduisent à la même rotation que θ et A_1 .

Exemple 1 (bis). Reprenons $M_{ex1} \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ de l'Exemple 1, à savoir

$$M_{ex1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{3} & \sqrt{2} & 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Avec la matrice de rotation P (et $P^{-1} = P^T$) mis en évidence dans Exemple 1 et les formules (14)–(14bis), ou bien en prenant la (matrice) partie antisymétrique normalisée de M_{ex1} ,

$$\theta_{ex1} = \frac{\pi}{6} \text{ et } A_{1,ex1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ (soit } \begin{pmatrix} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{)} \quad (15)$$

conviennent. Ainsi, $e^{\theta_{ex1}(A_{1,ex1})} = I_3 + \frac{1}{2}A_{1,ex1} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)A_{1,ex1}^2 = M_{ex1}$.

Exemple 1 (ter). Toujours avec $M_{ex1} \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ de l'Exemple 1, voici, via les formules de (10) et les valeurs $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, les coefficients a, b, c, d de la forme dépouillée (12) :

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, \quad b = 0, \quad c = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, \quad d = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \quad (16)$$

3. D'une matrice antisymétrique vers une matrice de rotation par une transformation rationnelle et vice versa

Voici une paramétrisation de l'ensemble des matrices (3, 3) de rotation, différente de la précédente (section 2), et mieux connue (sujets d'exercices écrits ou oraux dans les examens et concours). Nous la détaillons pour les matrices (3, 3) mais la démarche est similaire pour les matrices (2, 2).

Partons donc de $R \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$. Elle a toujours 1 comme valeur propre, éventuellement -1 aussi. Dans ce dernier cas, la valeur propre -1 est nécessairement double et notre rotation R est semblable à la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1, -1)$. Ce cas particulier correspond à la situation géométrique ou physique où la restriction de R au plan orthogonal à l'axe de rotation dirigée par \vec{n} est une symétrie par rapport à l'origine (dans le plan); on comprend qu'il s'agisse pour R d'un *demi-tour* (on dit aussi *retournement*) autour de l'axe dirigé par \vec{n} .

Examinons plus en détail le cas où R n'a pas -1 comme valeur propre, donc celui où $\det(R - (-1)I_3) \neq 0$.

Comme la matrice $R + I_3$ est inversible, on peut donc considérer $A = (I_3 - R)(R + I_3)^{-1}$; c'est la seule matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$(A + I_3)(R + I_3) = 2I_3. \quad (17)$$

Cette matrice $A = (I_3 - R)(R + I_3)^{-1}$ est aussi égale à $(R + I_3)^{-1}(I_3 - R)$ (si, et ça aide pour la suite!); il n'est pas alors difficile, en jouant sur le calcul $M^{-1}M = MM^{-1} = I_3$ valable pour toute matrice M , de constater que A est *antisymétrique*.

Revenir de A vers R n'est pas plus difficile puisque, en suivant la même manière de faire que précédemment (se souvenant que -1 ne peut être valeur propre de A) on a : $R = (I_3 - A)(A + I_3)^{-1}$ (égal à $(A + I_3)^{-1}(I_3 - A)$, si!).

Ce va-et-vient entre $A \in \mathcal{AS}_3(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$ est appelée *transformation de CAYLEY*.

Nous avons ainsi une paramétrisation des matrices de rotation R n'ayant pas -1 comme valeur propre grâce aux matrices antisymétriques A :

$$R = (I_3 - A)(A + I_3)^{-1}. \quad (18)$$

Elle est, bien sûr, différente de la paramétrisation par exponentiation vue au paragraphe 2.

Avant de voir ce que donne la formule (18) dans le cas des matrices (3, 3), voyons ce qu'elle donne pour les matrices (2, 2). Une matrice (2, 2) antisymétrique est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$. Le calcul de $R = (I_2 - A)(A + I_2)^{-1}$ conduit facilement à

$$R_t = \begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix};$$

on y reconnaît la paramétrisation de toutes les rotations du plan, $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ($\theta \in \mathbb{R}$),

sauf la symétrie $-I_2$ ($= \lim_{t \rightarrow +\infty} R_t$), grâce aux expressions rationnelles de $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et de $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ via le changement de variables $t = \tan(\theta/2)$.

Passons au cas des matrices (3, 3). Prenant $A = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$ comme matrice antisymétrique de base (attention, (α, β, γ) n'est pas forcément unitaire ici, contrairement

à un contexte précédent), on obtient grâce à (18) la forme générale de R que voici (certes c'est un peu calculatoire...) :

$$R = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1} \begin{bmatrix} \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 1 & 2(\alpha\beta + \gamma) & 2(\alpha\gamma - \beta) \\ 2(\alpha\beta - \gamma) & -\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 1 & 2(\beta\gamma + \alpha) \\ 2(\alpha\gamma + \beta) & 2(\beta\gamma - \alpha) & -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

On voit bien que les demi-tours ne sont pas représentées dans (19) puisque

$$\text{tr}(R) = \frac{3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{1 + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}, \quad (20)$$

censé valoir $1 + 2 \cos \theta$, ne permet pas d'accéder à $\cos \theta = -1$ (soit $1 + 2 \cos \theta = -1$) caractéristiques des demi-tours. En fait, c'est un cas limite des situations au-dessus puisque $\lim_{\|(\alpha, \beta, \gamma)\| \rightarrow \infty} \text{tr}(R) = -1$.

Le cas particulier où $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = -t$ donne pour R dans (19) :

$$\begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} & 0 \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui n'est autre que le "plongement" dans le cas tridimensionnel de ce que nous avons vu plus haut pour le cas bidimensionnel.

Comme on s'y attend, la forme (19) peut être exprimée comme dans la forme générale (12) en posant :

$$\begin{cases} a = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1}}, b = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1}}, \\ c = -\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1}}, d = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1}}. \end{cases} \quad (21)$$

Résumé-bilan des paramétrisations

Retenons des paramétrisations des matrices (3, 3) de rotation R vues aux paragraphes 2 et 3 les *trois résultats fondamentaux* que voici.

★ Première expression :

$$R = I_3 + (\sin \theta) A_1 + (1 - \cos \theta) A_1^2. \quad (22)$$

Cette paramétrisation est appelée parfois "formulation axe-angle d'EULER & RODRIGUES" de la rotation R car on y "voit" $(\cos \theta, \sin \theta)$ de l'angle θ et l'axe (α, β, γ) de la rotation R (information contenue dans A_1). RODRIGUES s'en était servi pour obtenir des formules donnant l'axe (dirigée par \vec{n}_3) et le cosinus $\cos \theta_3$ (ou le sinus) de l'angle θ_3 de la rotation composée $R_3 = R_2 R_1$ à partir des mêmes informations sur chacune des deux rotations, $(\vec{n}_1, \cos \theta_1)$ pour R_1 et $(\vec{n}_2, \cos \theta_2)$ pour R_2 . Ces formules n'ont, à notre sens, qu'un intérêt théorique ou historique, car pour déterminer $(\vec{n}_3, \cos \theta_3)$ directement à partir de R_3 il y a plus efficace et plus rapide (*cf.* section 4 plus bas). Nous y reviendrons toutefois dans

la deuxième partie de notre étude (avec le même titre) lorsque les quaternions entreront en jeu.

★ Deuxième paramétrisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1} \begin{bmatrix} \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 1 & 2(\alpha\beta + \gamma) & 2(\alpha\gamma - \beta) \\ 2(\alpha\beta - \gamma) & -\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 1 & 2(\beta\gamma + \alpha) \\ 2(\alpha\gamma + \beta) & 2(\beta\gamma - \alpha) & -\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + 1 \end{bmatrix}, \\ \text{mis à part les demi-tours.} \end{array} \right. \quad (23)$$

★ Troisième paramétrisation :

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & -a^2 + b^2 - c^2 + d^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc + ad) & -a^2 - b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix} \\ \text{où} \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \end{array} \right. \quad (24)$$

Quatre remarques sur cette dernière paramétrisation :

- Il est clair que (a, b, c, d) et $(-a, -b, -c, -d)$ donnent lieu à la même matrice de rotation R . Cette ambiguïté n'est pas trop gênante car les coefficients apparaissent souvent multipliés deux par deux dans les calculs. Ces réels a, b, c, d sont appelés parfois "paramètres d'EULER & RODRIGUES" de la rotation R .

- Etonnant que l'on puisse avoir, via (24), *toutes* les rotations de \mathbb{R}^3 avec seulement 4 paramètres constituant les composantes de la sphère unité euclidienne de \mathbb{R}^4 .

- Puisque la rotation $R = [r_{i,j}]$ a été paramétrisée comme en (24), on a facilement les carrés des paramètres d'EULER & RODRIGUES en fonction des éléments diagonaux de R (tenant compte du fait que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{1,1} - r_{2,2} - r_{3,3}) \\ b^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{2,2} - r_{1,1} - r_{3,3}) \\ c^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{3,3} - r_{1,1} - r_{2,2}) \\ d^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{1,1} + r_{2,2} + r_{3,3}) \end{array} \right. .$$

On en déduit par exemple $d > 0$ (ou l'un des autres coefficients) puis on continue avec les coefficients non diagonaux pour avoir a, b, c avec leurs signes corrects. Voyons cela sur un exemple.

Exemple 2. Soit la matrice (3, 3) de rotation

$$R = [r_{i,j}] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} .$$

A l'aide de la relation $d^2 = \frac{1}{4}(1 + r_{1,1} + r_{2,2} + r_{3,3})$, choisissons

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{1,1} + r_{2,2} + r_{3,3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} .$$

Puis :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4d}(r_{3,2} - r_{2,3}) = \frac{1}{\sqrt{6}}; \\ b &= \frac{1}{4d}(r_{1,3} - r_{3,1}) = \frac{1}{\sqrt{6}}; \\ c &= \frac{1}{4d}(r_{2,1} - r_{1,2}) = 0. \end{aligned}$$

Reconnaissons qu'il y a du chemin qui a été parcouru entre l'expression R de départ et la paramétrisation ultime (24) d'EULER & RODRIGUES !

- Le produit R_2R_1 de 2 rotations est une nouvelle rotation R . Si (a_1, b_1, c_1, d_1) (resp. (a_2, b_2, c_2, d_2)) sert à paramétrer R_1 (resp. R_2), le quadruplet (a, b, c, d) qui permet la paramétrisation de R_2R_1 est obtenu par multiplication matricielle et on trouve

$$\begin{cases} a = a_2d_1 + d_2a_1 - c_2b_1 + b_2c_1, \\ b = b_2d_1 + d_2b_1 - a_2c_1 + c_2a_1, \\ c = c_2d_1 + d_2c_1 - b_2a_1 + a_2b_1, \\ d = d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2), \end{cases} \quad (25)$$

et donc $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ nécessairement ; avouez que ça ne se devine pas !



Figure 3. B. OLINDE RODRIGUES (Source Wikimedia Commons)

4. Axe et cosinus/sinus de l'angle de la rotation R

La simplicité de la "formulation axe-angle" (22) de R et la généralité de la représentation (24) avec les éléments (a, b, c, d) de la sphère euclidienne unité de \mathbb{R}^4 nous serviront de guides

pour ce qu'il y a lieu de faire pour trouver les deux éléments essentiels de R , à savoir son axe \mathbb{D} (dirigé par \vec{n}) et son angle θ (à $2k\pi$ près bien sûr) de rotation. Nous reprenons et complétons ce qui a déjà été vu sur le sujet.

Le cas particulier où $R = I_3$ peut être exclu d'entrée.

4.1 Axe de rotation

1^{ère} **méthode**, déjà vue au paragraphe 1.

Il s'agit d'utiliser les ressources de l'Algèbre linéaire et de déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de R . On obtient ainsi une droite vectorielle, que nous avons notée \mathbb{D} : elle indique bien l'axe de rotation de R .

2^{ème} **méthode**.

Elle est suggérée par la formule (22) ; la clé se trouve dans la matrice A_1 . On voit tout de suite qu'il y a une petite difficulté si $\sin \theta$ est égal à 0. Nous allons donc distinguer deux cas, suivant que $R^T = R$ ou pas.

- 1^{ère} situation. Celle où $R^T = R (= R^{-1})$. Ce sont exactement les deux cas suivants : celui où $R = I_3$, que nous avons exclu dès le début ; celui où les valeurs propres de R sont 1, -1 , -1 . Dans ce deuxième cas, la trace de R vaut -1 , d'où $\cos \theta = -1$ et $\theta = \pi$ (à $2k\pi$ près) : R est un demi-tour d'axe $\mathbb{D} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : R\vec{u} = \vec{u}\}$.

Signalons une façon supplémentaire de procéder dans ce deuxième cas pour trouver l'axe du demi-tour. En effet, $R^2 = I_3$ de sorte que $R(I_3 + R) = I_3 + R$; ainsi, si \vec{u} est un vecteur-colonne non nul de $I_3 + R$ (et il y en a forcément puisque $R \neq -I_3$), on a $R\vec{u} = \vec{u}$. L'axe du demi-tour est dirigé par un tel vecteur \vec{u} .

Voici un exemple de telle situation.

Exemple 3. Soit la matrice de rotation symétrique $R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Alors

$I_3 + R = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, de sorte que $\vec{u} = (2, 2, 2)$ dirige bien l'axe de rotation de R .

- 2^{ème} situation. Celle, plutôt générale, où $R^T \neq R$. Alors, s'appuyant encore sur la formule (22), $A = \frac{1}{2}(R - R^T)$ est une matrice antisymétrique non nulle : elle peut donc s'écrire

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

où $(a, b, c) \neq 0$ dans \mathbb{R}^3 . Alors, l'axe de rotation est la droite vectorielle \mathbb{D} dirigée par le vecteur (a, b, c) . Autre manière de dire les choses :

$$\mathbb{D} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : R\vec{u} = \vec{u}\} = \text{Ker}A. \quad (27)$$

3^{ème} **méthode**. Elle s'applique lorsqu'on ne dispose que de l'information suivante : deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} et leurs images par la rotation R , $R\vec{u}$ et $R\vec{v}$ (à condition toutefois

que $R\vec{u} - \vec{u}$ et $R\vec{v} - \vec{v}$ ne soient pas colinéaires). Alors, l'axe de rotation est dirigé par le vecteur $\vec{w} = (R\vec{u} - \vec{u}) \wedge (R\vec{v} - \vec{v})$.

L'intuition et la visualisation géométriques suggèrent bien que $(R\vec{u} - \vec{u})$ et $(R\vec{v} - \vec{v})$ sont dans le plan $\mathbb{P} = \mathbb{D}^\perp$ de rotation, et donc \vec{w} dirige la droite \mathbb{D} orthogonale à \mathbb{P} . Analytiquement, on le voit aussi, puisqu'à l'aide de la représentation axe-angle (22) de R ,

$$R\vec{u} - \vec{u} = (\sin \theta) A_1 \vec{u} + (1 - \cos \theta) A_1^2 \vec{u},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \langle R\vec{u} - \vec{u}, \vec{n} \rangle &= (\sin \theta) \langle A_1 \vec{u}, \vec{n} \rangle + (1 - \cos \theta) \langle A_1^2 \vec{u}, \vec{n} \rangle \\ &= (\sin \theta) \langle \vec{u}, (-A_1) \vec{n} \rangle + (1 - \cos \theta) \langle A_1 \vec{u}, (-A_1) \vec{n} \rangle \\ &= 0 \text{ puisque } A_1 \vec{n} = \vec{n} \wedge \vec{n} \text{ (cf. (6))} = \vec{0}. \end{aligned}$$

4.2 Cosinus/sinus de l'angle de rotation

Pour déterminer le cosinus et/ou le sinus de l'angle θ de la rotation R , voici deux méthodes (au moins).

1^{ère} méthode, déjà entrevue au paragraphe 1. Elle consiste à prendre la trace de R , dont on sait depuis le début qu'elle vaut $1 + 2 \cos \theta$, dans la décomposition (22); comme $\text{tr} A_1 = 0$ et $\text{tr}(A_1^2) = -2$, il vient que $\text{tr} R = 3 - 2(1 - \cos \theta) = 1 + 2 \cos \theta$. Par conséquent, le cosinus de l'angle de la rotation R est le $\cos \theta$ de la formule (22) (comme par hasard...). Et qui a accès à $\cos \theta$ a accès à $|\sin \theta|$ puisque $|\sin \theta| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$.

2^{ème} méthode, complétant la détermination de l'axe vue au-dessus au sous-paragraphe 4.1 (2^{ème} situation de la 2^{ème} méthode). La matrice antisymétrique $A = \frac{1}{2}(R - R^T)$ mise en évidence en (26) peut être "factorisée" en

$$A = \rho \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

où $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur *unitaire* orientant l'axe \mathbb{D} de la rotation R et ρ est le sinus de l'angle θ de la rotation R . Evidemment (\vec{n}, θ) et $(-\vec{n}, -\theta)$ conviennent pour la même rotation R .

3^{ème} méthode. Elle consiste à prendre un vecteur unitaire \vec{u} dans le plan de rotation $\mathbb{P} = \mathbb{D}^\perp = (\mathbb{R} \vec{n})^\perp$; son image par R est à nouveau un vecteur unitaire $R\vec{u}$, et

$$\langle R\vec{u}, \vec{u} \rangle = \cos \theta. \tag{28}$$

Cela se voit rapidement grâce à ce que nous avons explicité au sous-paragraphe 1.3 (rotation plane dans le plan \mathbb{P}), ou bien grâce à la formule axe-angle (22) :

$$\langle R\vec{u}, \vec{u} \rangle = 1 + 0 + (\cos \theta - 1) \times 1 = \cos \theta.$$

4^{ème} **méthode**. On oriente l'axe \mathbb{D} de la rotation R par le choix d'un vecteur unitaire \vec{n} ; on choisit un vecteur non nul quelconque \vec{u} dans le plan $\mathbb{P} = \mathbb{D}^\perp$. Alors, le signe de θ , qui est aussi celui de $\sin \theta$, est donné par

$$\sin \theta = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \det [\vec{u}, R\vec{u}, \vec{n}]. \quad (29)$$

Rappelons qu'ici $\det [\vec{u}, R\vec{u}, \vec{n}] = \langle \vec{u} \wedge R\vec{u}, \vec{n} \rangle$ est le dit produit mixte des vecteurs \vec{u} , $R\vec{u}$ et \vec{n} .

4.3 Retour aux paramètres d'EULER & RODRIGUES

Si la rotation R a un axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ et est d'un angle θ , les paramètres d'EULER & RODRIGUES sont alors obtenus par les relations (de correspondance) suivantes (revoir (10)) :

$$a = n_1 \sin(\theta/2), b = n_2 \sin(\theta/2), c = n_3 \sin(\theta/2), d = \cos(\theta/2).$$

Attention encore une fois, il s'agit bien de $\theta/2$ et non de θ ... On voit bien que changer θ en $\theta + 2\pi$ fait changer $\frac{\theta}{2}$ en $\frac{\theta}{2} + \pi$, et donc les paramètres a, b, c, d en $-a, -b, -c, -d$, c'est-à-dire qu'au final il s'agit de la même rotation R .

La trace de R écrite avec les paramètres a, b, c, d (voir (24)) est $3d^2 - b^2 - c^2 - a^2$, ce qui avec les relations de correspondance juste au-dessus donnent $3 \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$, ce qui est bien $2 \cos \theta + 1$ comme attendu.

5. Une rotation R vue par la Physique-Mécanique

Jusqu'à présent nous avons fait des mathématiques, et que des mathématiques (de l'Algèbre linéaire : détermination de valeurs et vecteurs propres, calcul de produits et d'exponentielles de matrices,...; du calcul vectoriel : produit scalaire, produit vectoriel, projections orthogonales,...), pour "désosser" l'*objet mathématique* qu'est une matrice $(3, 3)$ de rotation R . Or, à la base, une rotation est une opération de la Physique-Mécanique..., on doit donc pouvoir arriver aux formulations explicitées jusqu'à présent par des considérations purement physiques et géométriques. C'est ce que nous allons faire succinctement ici.

Considérons donc une rotation au sens physique de ce terme ("on tourne"), d'axe dirigé par le vecteur unitaire \vec{n} et d'angle θ dans le plan orienté \mathbb{P} . Un vecteur (général) \vec{u} est "tourné" d'un angle θ autour de la droite \mathbb{D} dirigée par \vec{n} ¹⁰ Un point individuel, ainsi que tous les points d'un solide donné, sont tournés avec la même amplitude.

Suivre sur la Figure 4 le raisonnement qui suit.

10. Pour un observateur traversé par le vecteur \vec{n} des pieds vers la tête, la rotation est d'amplitude θ de sa droite vers sa gauche.

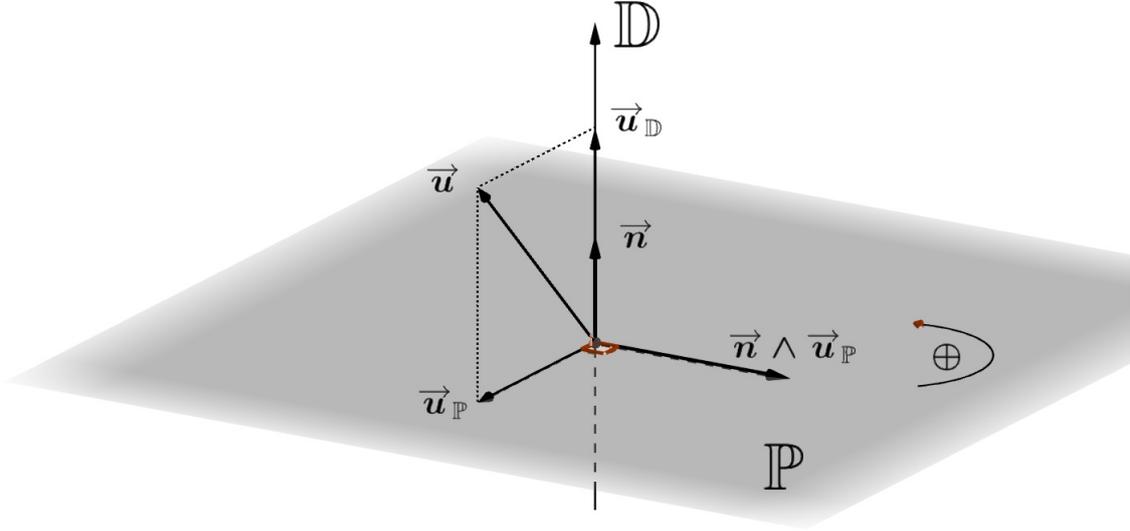


Figure 4.

Le vecteur \vec{u} se décompose en (est la somme de) deux vecteurs orthogonaux : sa projection orthogonale $\vec{u}_{\mathbb{D}}$ sur \mathbb{D} , $\vec{u}_{\mathbb{D}} = \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n}$ (qui ne bougera pas avec la rotation) et sa projection orthogonale $\vec{u}_{\mathbb{P}}$ sur $\mathbb{P} = \mathbb{D}^{\perp}$, $\vec{u}_{\mathbb{P}} = \vec{u} - \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n}$ (qui subira la rotation d'angle θ dans le plan). La clé à présent est de considérer le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{u}_{\mathbb{P}}$: celui-ci est *directement orthogonal* à $\vec{u}_{\mathbb{P}}$, dans le même plan que $\vec{u}_{\mathbb{P}}$, et de même longueur que $\vec{u}_{\mathbb{P}}$. Ainsi, l'image de $\vec{u}_{\mathbb{P}}$ par la rotation R est $(\cos \theta) \vec{u}_{\mathbb{P}} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u}_{\mathbb{P}}$. En conséquence,

$$\begin{aligned} R\vec{u} &= R\vec{u}_{\mathbb{D}} + R\vec{u}_{\mathbb{P}}, \\ &= \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n} + (\cos \theta) (\vec{u} - \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n}) + (\sin \theta) \vec{n} \wedge (\vec{u} - \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n}) \\ &= (\cos \theta) \vec{u} + (1 - \cos \theta) \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \vec{n} + (\sin \theta) \vec{n} \wedge \vec{u} \quad (\text{puisque } \vec{n} \wedge \vec{n} = \vec{0}), \end{aligned}$$

qui est bien ce à quoi le calcul matriciel avait abouti (en (7ter)).

Conclusion

Après cette visite de la maison multi-pièces des matrices de rotation $(3, 3)$, nous sommes prêts pour continuer avec la visite d'une maison voisine, celle des quaternions ; ce sera l'objet d'un autre article pédagogique (ou de popularisation) de même titre que celui-ci (et de sous-titre : *2^{ème} partie : l'apport des quaternions*). En attendant, comme l'aura deviné le lecteur, ce qui a été présenté ici admet des généralisations au cas des matrices orthogonales (n, n) de déterminant 1, et surtout des explications mathématiques ; c'est le contexte de groupes de LIE classiques, dont un concentré, mais d'un niveau supérieur à celui adopté ici, est la référence [7].

Remerciements

Nos remerciements vont à SOPHIE JAN (Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)) et SERGE LAPORTE (Airbus et IMT) pour des échanges sur le sujet, ainsi qu'à NORBERT VERDIER (IUT de Cachan (France)) pour nous avoir signalé les références [1] et [11].

Les lecteurs-arbitres (*referees*) du Bulletin de l'AMQ ont proposé des améliorations par rapport à la version initialement soumise ; qu'ils en soient remerciés aussi.

Références

1. S. ALTMAN et E. ORTIZ, éditeurs. *Mathematics and social utopias in France : Olinde Rodrigues and his times*. Série History of mathematics, vol. 28, American Math Society (2005).
2. J. GRIFONE, *Algèbre linéaire (Bac à Bac + 2)*. Cepaduès-Editions Toulouse, 6^{ème} édition (2018).
3. J.-B. HIRIART-URRUTY et Y. PLUSQUELLEC, *Exercices d'algèbre linéaire & bilinéaire (Bac + 2)*. Cepaduès-Editions Toulouse (1988).
4. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Les mathématiciens dans le patrimoine régional du "Grand Sud-Ouest"*. Webzine CultureMath (printemps 2018).
5. HUI CHENG et K. C. GUPTA, *An historical note on finite rotations*. Journal of Applied Mechanics 59 (1989), 139 – 145.
6. M. L. MARITZ, *Rotations in three Dimensions*. SIAM Review, vol. 63, n° 2, 395–404 (2021).
7. R. MNEIMNÉ et F. TESTARD, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, Paris (1986).
8. B. PALAIS et R. PALAIS, *Euler's fixed point theorem ; the axis of a rotation*. Journal of Fixed Point Theory and Applications 2 (2007), 215 – 220.
9. B. PALAIS, R. PALAIS et S. RODI, *A disorienting look at Euler's theorem on the axis of a rotation*. American Math. Monthly 116 (2009), 892 – 909.
10. J. PUJOL, *Hamilton, Rodrigues, Gauss, Quaternions, and Rotations : a historical reassessment*. Communications in Mathematical Analysis, vol. 12, n°2 (2012), 1 – 14.
11. B. O. RODRIGUES, *Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendants des causes qui peuvent les produire*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5 (1840), 380 – 440.
Il a été analysé, traduit en anglais, dans
R. FRIEDBERG, *Rodrigues, Olinde : "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide..." , translation and commentary*. arXiv :2211.07787 (2022).