

# L'hexagone des fonctions trigonométriques

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY<sup>1</sup> et YOUCHUN QIU<sup>2</sup>

## Résumé.

Nous montrons comment deux schémas en formes d'hexagones réguliers peuvent aider à assimiler les différentes relations entre les fonctions trigonométriques, aussi bien circulaires qu'hyperboliques.

## Introduction

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) sont des objets mathématiques de base que tous les élèves (de lycées) ou étudiants débutant en sciences essaient d'approprier... Habituellement, s'y référer fait remonter à l'esprit des difficultés à se remémorer les connexions entre elles, les règles de calcul, etc. Ce que nous proposons ici est une manière synthétique de montrer les relations entre les principales fonctions trigonométriques, dans le but de les assimiler ainsi que mémoriser les différentes relations. Nous le faisons à l'aide d'un diagramme, en forme d'hexagone régulier dont les sommets sont les six fonctions trigonométriques de base. Cette manière de faire était enseignée dans les lycées en Chine il y a quelques années, ce dont le second auteur a fait l'expérience. Elle subsiste encore dans certains pays étrangers, mais n'apparaît pas en France.

Nous profitons de cette note pour présenter un autre diagramme de la même veine, concernant cette fois-ci les fonctions hyperboliques.

## I Commençons avec des définitions : de quoi parlons-nous ?

Les quatre premières fonctions trigonométriques (ou circulaires) sont : la fonction sinus (*sin* en abrégé), la fonction cosinus (*cos*), la tangente (*tan*) et la cotangente (*cotan* ou *cot*). Le préfixe “co” est là pour exprimer “qui va avec”, comme pour locataire-colocataire : cosinus va avec sinus, cotangente avec tangente. Tous ces objets mathématiques sont définis et introduits en collèges et lycées à propos de l'étude des triangles. Ces triangles auraient très bien pu s'appeler des trigones (de la racine grecque *gonia* qui signifie coin, donc un trigone est “avec trois coins”) ; cette référence au triangle (ou trigone) explique l'origine du qualificatif *trigonométrique*.

En plus de ces quatre fonctions, on peut en considérer deux supplémentaires : la sécante (*sec* en abrégé) et la cosécante (*cosec* ou *csc*) :

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} ; \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}. \quad (1)$$

---

1. Université Paul Sabatier de Toulouse

118 Route de Narbonne

31062 Toulouse Cedex 09

Mél. : [jbhu@math.univ-toulouse.fr](mailto:jbhu@math.univ-toulouse.fr)

Site web professionnel : [www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/](http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/)

2. Université Paul Sabatier de Toulouse

118 Route de Narbonne

31062 Toulouse Cedex 09

Mél. : [youchun.qiu@math.univ-toulouse.fr](mailto:youchun.qiu@math.univ-toulouse.fr)

Ces deux fonctions additionnelles sont largement utilisées dans la littérature anglo-saxonne, notamment celle des sciences de l'ingénieur, mais, reconnaissons-le, très peu en France.

## II L'hexagone des six fonctions trigonométriques (circulaires)

Les six fonctions trigonométriques introduites dans le paragraphe précédent sont placées à présent aux sommets d'un hexagone régulier, de manière à ce qu'un certain nombre de relations intéressantes entre elles puissent être "vues" sur la figure et mémorisées. Nous allons les lister et les commenter. Pour être complet, nous avons mis 1 au centre de l'hexagone.

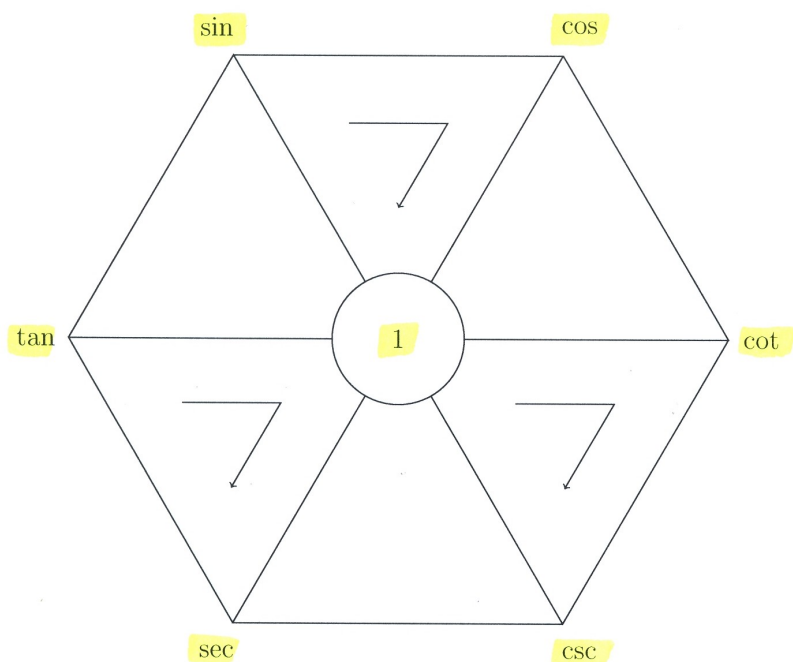


FIGURE 1 – Hexagone des fonctions circulaires

### - Fonctions diamétralement opposées

Chaque fonction placée à un sommet est l'inverse de celle qui lui est diamétralement opposée : par exemple,  $\sin$  et  $\csc$  sont inverses l'une de l'autre. Dit autrement : le produit de deux fonctions diamétralement opposées est égal à 1, la valeur qui figure au centre. Il y a 3 relations de ce type.

### - Fonctions voisines

Chaque fonction placée à un sommet est le produit des deux fonctions sur les sommets voisins (un à sa droite, un à sa gauche) : par exemple,  $\cos$  est le produit de ses deux voisins  $\sin$  et  $\cot$ ,  $\csc$  (ou  $\operatorname{cosec}$ ) est le produit de  $\cot$  et  $\sec$ , etc. Il y a 6 relations de la sorte.

### - Fonctions qui se suivent

Chaque fonction placée à un sommet est le quotient des deux fonctions qui figurent sur les sommets suivants (aller vers la droite ou vers la gauche) : par exemple,  $\tan$  est le

quotient de  $\sin$  par  $\cos$  (ou de  $\sec$  par  $\csc$ ),  $\csc$  est le quotient de  $\sec$  par  $\tan$ ,  $\cos$  est le quotient de  $\sin$  par  $\tan$ , etc. Il y a 12 relations de ce type.

- *Addition des carrés de fonctions*

Dans l'hexagone des six fonctions trigonométriques, il y a trois triangles équilatéraux placés au nord, sud-est et sud-ouest (voir Figure 1). Les fonctions placées aux deux sommets extérieurs et la fonction constante 1 placée au sommet le plus central de ces trois triangles suivent la règle suivante : en suivant le sens de la flèche (voir Figure 1), la somme des carrés des deux premiers sommets est égal au carré du troisième sommet :

$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \ ; \ 1 + \cot^2 = \csc^2 \ ; \ \tan^2 + 1 = \sec^2. \quad (2)$$

Les six fonctions trigonométriques, plus la fonction constante 1, sont impliquées dans l'ensemble des trois relations figurant dans (2).

### III L'hexagone des six fonctions hyperboliques

Ce qu'on appelle fonctions hyperboliques sont les analogues des fonctions trigonométriques (ou circulaires). Les quatre premières fonctions hyperboliques sont : le sinus hyperbolique ( $\sinh$  en abrégé), le cosinus hyperbolique ( $\cosh$ ), la tangente hyperbolique ( $\tanh$ ) et la cotangente hyperbolique ( $\coth$ ). Comme dans les sections précédentes, nous en ajoutons deux autres : la sécante hyperbolique ( $\operatorname{sech}$  en abrégé) et la cosécante hyperbolique ( $\operatorname{csch}$ ) :

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \ ; \ \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}. \quad (3)$$

Dans un cursus de formation usuel, on apprend les définitions et les propriétés des fonctions circulaires (au lycée par exemple) *avant* celles des fonctions hyperboliques (plutôt les premières années des études post-Bac). Gardant cela à l'esprit, nous prétendons qu'il y a une règle générale permettant de découvrir une identité sur les fonctions hyperboliques à partir de celle sur les fonctions trigonométriques. Nous l'avons expérimentée maintes et maintes fois lors de nos enseignements, cela fonctionne parfaitement. La voici : considérons une formule ou identité quelconque sur les fonctions trigonométriques (théoriquement apprise en premier) ; écrire la même avec les fonctions hyperboliques (ainsi, on ajoute juste la lettre  $h$ ) ; *changer le signe si, et seulement si, la fonction sinus apparaît deux fois comme produit* (par exemple dans  $\sin^2$  ou  $\sin \times \tan$ ). Illustrons cette manière de faire avec les exemples qui suivent :

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \text{ donne } \cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

(changement de signe dans le carré du *sinus*) ;

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \text{ donne } \sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

(pas de changement de signe puisque *sinus* n'apparaît qu'une fois) ;

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \text{ donne } \tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

(changement de signe du carré de la *tangente*,  
contenant le carré de *sinus* sous forme cachée) ;

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \text{ donne} \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ &\quad (\text{changement de signe dû au produit de deux } \sinus); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(y) &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ &\text{donne} \\ \sinh(x) + \sinh(y) &= 2 \sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ &\quad (\text{pas de changement de signe puis que } \sinus \text{ apparaît une seule fois}); \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Cette manière de faire n'est pas un tour de passe-passe..., il y a une raison mathématique derrière tout cela : passer de la fonction circulaire sinus à la fonction hyperbolique de même nom suppose, du moins pour les variables complexes, une multiplication par le nombre complexe  $i$ , dont le carré  $i \times i$  est précisément  $-1$  (en fait,  $\sinh(z) = i \times \sin(iz)$ ; mais on n'insiste pas là-dessus ici).

Et comme on l'imagine, il y a un hexagone de fonctions hyperboliques semblable à celui des fonctions circulaires. Le voici (Figure 2).

Les relations sont très similaires à celles discutées pour la Figure 1, excepté pour la "règle du pouce" expliquée juste au-dessus.

- *Fonctions diamétralement opposées*

Chaque fonction placée à un sommet est l'inverse de celle qui lui est diamétralement opposée : par exemple,  $\sinh$  et  $\cosh$  sont inverses l'une de l'autre. Il y a 3 relations de ce type.

- *Fonctions voisines*

Chaque fonction placée à un sommet est le produit des deux fonctions sur les sommets voisins (un à sa droite, un à sa gauche) : par exemple,  $\cosh$  est le produit de ses deux voisins  $\sinh$  et  $\coth$ ,  $\cosh$  est le produit de  $\coth$  et  $\sech$ , etc. Il y a 6 relations de la sorte.

- *Fonctions qui se suivent*

Chaque fonction placée à un sommet est le quotient des deux fonctions qui figurent sur les sommets suivants (aller vers la droite ou vers la gauche) : par exemple,  $\tanh$  est le quotient de  $\sinh$  par  $\cosh$  (ou de  $\sech$  par  $\cosh$ ),  $\cosh$  est le quotient de  $\sech$  par  $\tanh$ ,  $\cosh$  est le quotient de  $\sinh$  par  $\tanh$ , etc. Il y a 12 relations de ce type.

- *Addition des carrés signés de fonctions*

Dans l'hexagone des six fonctions hyperboliques, il y a trois triangles équilatéraux placés au nord, sud-est et sud-ouest. Les fonctions placées aux deux sommets extérieurs et la fonction constante 1 placée au sommet le plus central de ces trois triangles vérifient la règle suivante : en suivant le sens de la flèche (voir Figure 2), la somme des carrés des deux premiers sommets (mais avec un signe moins si  $\sinh$  apparaît deux fois, marqués en rouge dans le diagramme) est égale au carré du troisième sommet :

$$-\sinh^2 + \cosh^2 = 1 ; 1 - \coth^2 = -\sech^2 ; -\tanh^2 + 1 = -\sech^2. \quad (4)$$

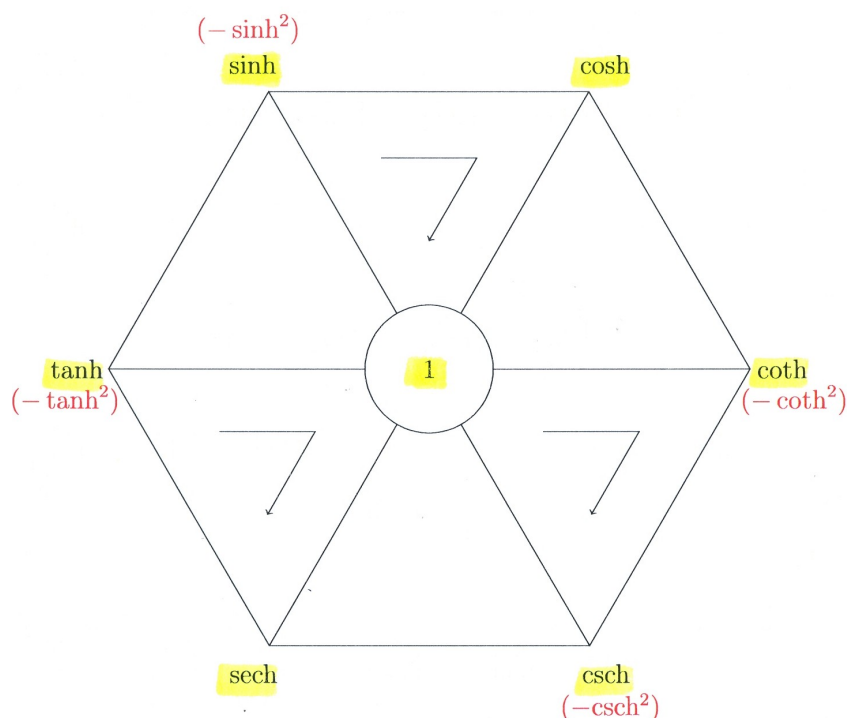


FIGURE 2 – Hexagone des fonctions hyperboliques

Les six fonctions hyperboliques, plus la fonction constante 1, sont impliquées dans l'ensemble des trois relations figurant dans (4).

### Conclusion

Bien que les fonctions trigonométriques soient des objets mathématiques bien étudiés depuis longtemps, les enseigner à différents groupes d'étudiants et dans divers pays nous permet d'échanger sur les expériences pédagogiques et les astuces de mémorisation. Cette note en est un exemple comme celles référencées en [1] et [2].

Les formules de trigonométrie (circulaire comme hyperbolique) doivent continuer à figurer dans les bagages de tout étudiant s'orientant vers les sciences de l'ingénieur.

### Références

[1] J.-B. HIRIART-URRUTY, *Les formules de trigonométrie sans pleurs...* Bulletin de l'APMEP, n°515, 407 – 410 (2015).

[2] J.-B. HIRIART-URRUTY et P. LASSÈRE, *La règle de dérivation  $(\sin)'(x) = \cos(x)$  sans se prendre la tête.* Quadrature n°130 (2023), 13 – 16.